Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 3A till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 16 februari 2010, kl 15.15-15.40.

1. Undersök om det finns några värden på talet a för vilka de fyra vektorerna $(1,1,0,0)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,0,3,1)$ och $(0,a,a,0)$ i R^4 blir linjärt oberoende.

Lösning: Vi placerar de fyra vektorerna som kolonner i en determinant och undersöker om den är skild från noll:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{utv eft rad } 1 = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{utv eft rad } 3 = 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & a \end{vmatrix}$$

så determinanten blir $(-1)\cdot 1\cdot a-(-1)a=2a$. De fyra vektorerna är alltså linjärt oberoende om och endast om $a\neq 0$.

2. Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} .$$

Låt L beteckna nollrummet till denna matris, dvs de kolonnmatriser $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^T$ sådana att

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^T=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Ange, med motivering, en bas för ett delrum M till R^5, med $\dim(M)\geq\dim(L)$, och sådant att de vektorer som tillhör både L och M, dvs $L\cap M$, bildar ett delrum av dimension 2 till R^5.

(Man får använda utan att bevisa det att snittet mellan två delrum till ett vektorrum alltid är ett delrum.)

Lösning: Vi tager två linjärt oberoende vektorer $\bar{e}_1^T$ och $\bar{e}_2^T$ i nollrummet och kompletterar med en tredje vektor $\bar{e}_3^T$ som inte tillhör nollrummet.

Vi bestämmer nollrummet: Matrisen är redan en trappstegsmatris så låter $x_3=t$, $x_4=s$ och $x_5=u$ och får

$$x_2=-2x_3-3x_4-2x_5=-2t-3s-2u\ , \qquad x_1=-x_2-x_3-x_4-x_5=(2t+3s+2u)-t-s-u=t+2s+u\ ,$$

och därmed

$$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]=t[1\ -2\ 1\ 0\ 0]+s[2\ -3\ 0\ 1\ 0]+u[1\ -2\ 0\ 0\ 1]\ .$$

Till exempel kan vi låta

$$\bar{e}_1^T=[1\ -2\ 1\ 0\ 0]^T\ , \qquad \bar{e}_2^T=[1\ -2\ 0\ 0\ 1]^T$$

Tager nu en vektor som inte tillhör nollrummet, genom prövning finner vi att

$$\bar{e}_3^T=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T\ ,$$

inte tillhör nollrummet eftersom $\mathbf{A}\bar{e}_3^T\neq\mathbf{0}$.

SVAR: Till exempel $\bar{e}_1^T=[1\ -2\ 1\ 0\ 0]^T$, $\bar{e}_2^T=[1\ -2\ 0\ 0\ 1]^T$, $\bar{e}_3^T=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$.