Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 3B till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 11 februari 2014, kl 10.15-10.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm det värde på talet a för vilket de fyra vektorerna $(1,1,0,1)$, $(0,1,0,1)$, $(1,1,-1,1)$ och $(2,3,1,a)$ är linjärt beroende.

Lösning. Vi vet att fyra vektorer i R^4 är linjärt beroende om och endast om determinanten av en matris med de fyra vektorerna som kolonner (eller rader) är lika med noll. Vi finner att

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 3$$

SVAR: $a = 3$

2. Låt L beteckna nollrummet till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestäm två olika delrum L_1 och L_2 till R^5 sådana att L är ett delrum till L_1 och L_1 är ett delrum till L_2. Dessutom skall $L \neq L_1$ och $L_2 \neq R^5$.

Delrummen skall beskrivas på ett sådant sätt att man lätt, t ex genom att lösa ett ekvationssystem eller med en matrismultiplikation, kan avgöra om en given vektor tillhör delrummet L_1 resp L_2.

För att få poäng på denna uppgift krävs en väl motiverad lösning!

Lösning. Låt $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Låt $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_5)^T$ och låt $\mathbf{0}$ beteckna en kolonnmatris bestående av enbart nollor. Då gäller att

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Bx} = \mathbf{0}, \qquad \text{och}, \qquad \mathbf{Bx} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Cx} = \mathbf{0}$$

dvs, med andra ord, $\mathbf{A}$:s nollrum är ett delrum till $\mathbf{B}$:s nollrum och $\mathbf{B}$:s nollrum är ett delrum till $\mathbf{C}$:s nollrum. Dessa nollrum betecknar vi med L, L_1 respektive L_2.

Vi vet att för $n \times m$-matriser $\mathbf{X}$, med nollrummet $N(\mathbf{X})$, gäller sambandet $\dim(N(\mathbf{X})) + \text{rang}(\mathbf{X}) = m$. Matriserna $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ har rang två respektive ett och alltså får vi

$$\dim(L_1) = 5 - 2 = 3, \qquad \text{och}, \qquad \dim(L_2) = 5 - 1 = 4.$$

Om vi lyckas visa att $\text{rang}(\mathbf{A}) = 3$ följer att $\dim(L) = 2$ och uppgiften är löst, eftersom då måste $L \neq L_1$ och $L_1 \neq L_2 \neq R^5$.

Subtraherar vi rad 3 i matrisen $\mathbf{A}$ tre gånger från rad 2 får vi en matris med samma rang

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & -5 & -9 & -16 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

som ju har rangen tre, eftersom rad 1 och rad 2 inte är multiplar av varandra.