Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 4A till kursen Linjär algebra för D och CL, SF1604, den 18 februari 2014, kl 13.15-13.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. (ON-system) Bestäm en ortogonalbas i delrummet $L = \text{Span}\{(2, 2, 1, -1), (0, -1, 2, 1)\}$ till R^4.

Lösning. Vi använder Gram-Schmidts metod. Låt $\bar{e}_1 = (2, 2, 1, -1)$ och låt

$$\bar{f}_2 = (0, -1, 2, 1) - \frac{(2, 2, 1, -1) \cdot (0, -1, 2, 1)}{(2, 2, 1, -1) \cdot (2, 2, 1, -1)}(2, 2, 1, -1) =$$

$$= (0, -1, 2, 1) - \frac{-1}{10}(2, 2, 1, -1) = (0.2, -0.8, 2.1, 0.9).$$

Vi multiplicerar $\bar{f}_2$ med 10, i syfte att få hela tal i basvektorerna.

SVAR: $\bar{e}_1 = (2, 2, 1, -1)$ och $\bar{e}_2 = (2, -8, 21, 9)$ utgör en ortogonalbas för L.

2. (ON-system) Hyperplanet π_1 består av de punker (x_1, x_2, x_3, x_4) i R^4 som satisfierar ekvationen $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2$ och hyperplanet π_2 består av de punkter (x_1, x_2, x_3, x_4) i R^4 som satisfierar ekvationen $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3$. Bestäm (kortaste) avståndet mellan π_1 och π_2 .

Lösning. I den 4-dimensionella geometrin är $\bar{n} = (2, 4, 3, -5)$ en normalvektor till bägge hyperplanen. Punkten $P = (1, 0, 0, 0)$ tillhör π_1 och punkten $Q = (0, 0, 1, 0)$ tillhör π_2, så avståndet mellan planen är längden hos projektionen av vektorn $\overline{PQ}$ på normalvektorn $\bar{n}$. Vi får nu

$$||\text{Proj}_{\bar{n}}(\overline{PQ})|| = ||\frac{(-1, 0, 1, 0) \cdot (2, 4, 3, -5)}{(2, 4, 3, -5) \cdot (2, 4, 3, -5)}(2, 4, 3, -5)|| = ||\frac{1}{54}(2, 4, 3, -5)|| = \frac{1}{54}\sqrt{54} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

SVAR: Avståndet mellan hyperplanen är

$$\frac{1}{3\sqrt{6}}.$$