

Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 5A till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 26 februari 2013, kl 13.15-13.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. För den linjära avbildningen A från R^3 till R^3 gäller att

$$A(1, 1, 0) = (1, 2, -1), \quad A(0, 1, 1) = (0, 1, 2), \quad A(0, 0, 1) = (2, 1, 0).$$

Bestäm $A(1, 2, 2)$.

Lösning: Vi använder att A är linjär och finner då att

$$\begin{aligned} A(1, 2, 2) &= A((1, 1, 0) + (0, 1, 1) + (0, 0, 1)) = A(1, 1, 0) + A(0, 1, 1) + A(0, 0, 1) = \\ &= (1, 2, -1) + (0, 1, 2) + (2, 1, 0) = (3, 4, 1). \end{aligned}$$

SVAR: $(3, 4, 1)$.

2. Antag att vektorrummet V har dimensionen $\dim(V) = 11$. Finns det någon linjär avbildning A från V till V sådan att bildrummets dimension är 8, dvs $\dim(\text{Im}(A)) = 8$ (eller $\dim(R(A)) = 8$ med lärobokens beteckning), och dessutom sådan att A^3 avbildar varje vektor i V på nollvektorn, dvs $A \circ A \circ A(\bar{x}) = \bar{0}$, för varje vektor \bar{x} i V ?

OBS Svaret skall motiveras, en resonerande text med väl valda och korrekta argument är OK.

Lösning: Vi vet att allmänt gäller att $\dim(\ker(A)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(A))$, så varje gång man applicerar avbildningen A så tappar man (högst) $11 - 8 = 3$ dimensioner. Efter tre appliceringar kan då högst 9 av de 11 dimensionerna försvinna. Så en sådan linjär avbildning A kan inte finnas.

Med mer precisa argument. Låt L vara ett delrum till V och låt $A(L)$ vara bilden av delrummet L under avbildningen A , dvs vektorerna $A(\bar{v})$ för \bar{v} i L . De vektorer i L som därvid avbildas på nollvektorn är då de vektorer som både tillhör L och $\ker(A)$, dvs $L \cap \ker(A)$.

Linjära algebrans fundamentalsats ger nu att

$$\dim(A(L)) = \dim(L) - \dim(L \cap \ker(A)) \geq \dim(L) - \dim(\ker(A)) = \dim(L) - 3,$$

eftersom

$$\dim(L \cap \ker(A)) \leq \dim(\ker(A)).$$

Låt $A^i(V) = L_i$, så t ex $\text{Im}(A) = L_1$. Då gäller

$$\dim(L_1) = 8, \quad \dim(L_2) \geq 8 - 3 \quad \dim(L_3) \geq 5 - 3 = 2.$$

Alltså $A^3(V) = L_3 \neq \{\bar{0}\}$.