

Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 5A till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 25 februari 2014, kl 10.15-10.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. För den linjära avbildningen A från R^3 till R^3 gäller att

$$A(5, 4, 1) = (1, 1, -1), \quad A(3, 2, 1) = (0, 1, 1), \quad A(1, 2, 1) = (1, 1, 1).$$

Avbildningen A är inverterbar med inversen A^{-1} . Bestäm $A^{-1}(1, 2, 2)$.

Lösning. Vi finner att

$$A^{-1}(1, 2, 2) = A^{-1}((1, 1, 1) + (0, 1, 1)) = A^{-1}(1, 1, 1) + A^{-1}(0, 1, 1) = (1, 2, 1) + (3, 2, 1) = (4, 4, 2).$$

SVAR: $(4, 4, 2)$.

2. Bestäm matrisen, relativt standardbasen, till en linjär avbildning A sådan att A :s kärna och den sammansatta avbildningen $A \circ A$:s kärna är

$$\ker(A) = \text{Span}\{(1, 1, 0)\} \quad \text{respektive} \quad \ker(A \circ A) = \text{Span}\{(1, 2, 1), (1, 1, 0)\}.$$

OBS Det finns många olika linjära avbildningar som uppfyller ovanstående krav, men det räcker att du bestämmer matrisen till en av dessa.

Lösning. Vi definierar vår avbildning genom

$$A(1, 1, 0) = (0, 0, 0), \quad A(1, 2, 1) = (1, 1, 0), \quad A(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Då gäller att $\text{Im}(A) = \text{Span}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ har dimension 2 och därmed, pga fundamentalsatsen, har $\ker(A)$ dimension $3 - 2 = 1$. Vidare har vi

$$A \circ A(1, 1, 0) = A(0, 0, 0) = (0, 0, 0), \quad A \circ A(1, 2, 1) = A(1, 1, 0) = (0, 0, 0),$$

och

$$A \circ A(0, 0, 1) = A(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

vilket visar att $A \circ A$:s kärna har dimension 2, och är lika med $\text{Span}\{(1, 1, 0), (1, 2, 1)\}$. Vi bestämmer nu matrisen med Martins metod:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

SVAR: Till exempel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$