Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 5B till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 25 februari 2014, kl 10.15-10.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. För den linjära avbildningen A från R^3 till R^3 gäller att

$$A(5,3,1) = (2,2,-1), \qquad A(2,3,1) = (1,2,0), \qquad A(2,2,1) = (1,1,1).$$

Avbildningen A är inverterbar med inversen A^{-1}. Bestäm $A^{-1}(2,3,1)$.

Lösning. Vi finner att

$$A^{-1}(2,3,1) = A^{-1}((1,2,0)+(1,1,1)) = A^{-1}(1,2,0) + A^{-1}(1,1,1) = (2,3,1) + (2,2,1) = (4,5,2).$$

SVAR: $(4,5,2)$.

2. Bestäm matrisen, relativt standardbasen, till en linjär avbildning A sådan att A:s kärna och den sammansatta avbildningen $A \circ A$:s kärna är

$$\ker(A) = \text{Span}\{(0,1,1)\} \qquad \text{respektive} \qquad \ker(A \circ A) = \text{Span}\{(1,2,1),(0,1,1)\}.$$

OBS Det finns många olika linjära avbildningar som uppfyller ovanstående krav, men det räcker att du bestämmer matrisen till en av dessa.

Lösning. Vi definierar vor avbildning genom

$$A(0,1,1) = (0,0,0), \quad A(1,2,1) = (0,1,1), \qquad A(0,0,1) = (0,0,1).$$

Då gäller att $\text{Im}(A) = \text{Span}\{(0,1,1),(0,0,1)\}$ har dimension 2 och därmed, pga fundamentalsatsen, har $\ker(A)$ dimension $3-2=1$. Vidare har vi

$$A \circ A(0,1,1) = A(0,0,0) = (0,0,0), \quad A \circ A(1,2,1) = A(0,1,1) = (0,0,0),$$

och

$$A \circ A(0,0,1) = A(0,0,1) = (0,0,1).$$

vilket visar att $A \circ A$:s kärna har dimension 2, och är lika med $\text{Span}\{(1,1,0),(1,2,1)\}$. Vi bestämmer nu matrisen med Martins metod:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

SVAR: Till exempel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$