

Matematiska Institutionen  
KTH

**Lösningar till några övningar på linjära ekvationssystem och matriskalkyl inför lappskrivning nummer 1, SF1604, vt14.**

1. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

**LÖSNING:**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array} \right).$$

Vi läser ut ur tablån ovan att  $z = -1$ ,  $y = 2$  och  $x = 1$ .

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8 \\ -x + 5y + z = 10 \\ x - 18y + z = -38 \end{cases}$$

**LÖSNING:** Andra ekvationen adderad en gång till den tredje ekvationen och två gånger till den första ekvationen ger systemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8 \\ -x + 5y + z = 10 \\ -13y + 2z = -28 \end{cases}$$

Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x + 5y + z = 10 \\ -13y + 2z = -28 \end{cases}.$$

Låter vi nu  $y$  vara ett godtyckligt tal  $y = t$  så får vi för varje val av ett sådant tal  $t$  precis en lösning

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(-28 + 13t) = -14 + \frac{13}{2}t \\ x &= -10 + 5y + z = -10 + 5t - 14 + \frac{13}{2}t = -24 + \frac{23}{2}t. \end{aligned}$$

3. Låt **A** och **B** beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestäm en invers till matrisen  $\mathbf{A}$  och använd denna invers för att bestämma en matris  $\mathbf{X}$  sådan att  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ .

**LÖSNING:** Beräknar först inversen till matrisen  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisen till höger ovan är inversen men för säkerhets skull gör vi en kontroll

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

precis som det skall vara. Multiplicerar vi nu den givna matrisekvationen med  $\mathbf{A}^{-1}$  till vänster på bägge sidor om likhetstecknet får vi

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \text{dvs} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Vi finner alltså

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Låt matriserna  $\mathbf{A}$  och  $\mathbf{B}$  vara som ovan. Beräkna

$$(\mathbf{AA})^{-1}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{A})^{-1}, \quad (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})^T, \quad (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^T \quad \text{och} \quad (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1}.$$

**LÖSNING:**

a)

$$(\mathbf{AA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{A})^{-1} = (2\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$ , ty

$$\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1} \cdot 2\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

c)

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})^T = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d)

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^T = \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \right)^T = \left( \begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ -26 & 45 \end{pmatrix}$$

e)

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \left( \begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$

$$\frac{1}{5 \cdot 45 + (-26) \cdot (-19)} \begin{pmatrix} 45 & 26 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}$$

5. För vilka värden på talen  $a$  och  $b$  saknar systemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + u = 8 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ x - 18y + z + au = b \end{cases}$$

lösning.

**LÖSNING:** Andra ekvationen adderad en gång till den tredje ekvationen och två gånger till den första ekvationen ger systemet

$$\begin{cases} 2x + 13y - 2z + 5u = 28 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ -13y + 2z + (a+2)u = b+10 \end{cases}$$

Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet

$$\begin{cases} (a+7)u = b+38 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ -13y + 2z + (a+2)u = b+10 \end{cases}$$

Om  $a = -7$  och  $b \neq -38$  så saknar systemet uppenbarligen lösning.6. Bestäm samtliga värden på det reella talet  $a$  för vilka det homogena systemet nedan har icke-triviala lösningar.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

**LÖSNING:**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1-(a-1)^2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array} \right)$$

När  $a \neq 1$  finns det bara den triviala lösningen. I övriga fall finns det icke-triviala lösningar.

7. Du får reda på att ett linjärt ekvationssystem i de obekanta  $x$ ,  $y$  och  $z$  bl a har de bågge lösningarna  $(x, y, z) = (1, 2, 1)$  och  $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ . Vilken information ger detta om samtliga lösningar till systemet.

**Lösning:** Om  $\mathbf{c}$  och  $\mathbf{c}'$  är lösningar till systemet  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , dvs

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{b} \quad \text{och} \quad \mathbf{Ac}' = \mathbf{b}$$

så gäller att för varje reellt tal  $t$  att

$$\mathbf{A}(\mathbf{c} + t(\mathbf{c} - \mathbf{c}')) = \mathbf{Ac} + t(\mathbf{Ac} - \mathbf{Ac}') = \mathbf{b} + t(\mathbf{b} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} + t\mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Detta innebär att tripplarna

$$\mathbf{c} + t(\mathbf{c} - \mathbf{c}'),$$

för varje reellt tal  $t$ , är lösningar till systemet  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Med givna indata får vi nu att lösningsmängden innehåller tripplarna

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t((1, 2, 1) - (2, 1, 3)),$$

dvs

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(-1, 1, -2)$$

där  $t$  är ett godtyckligt reellt tal.

Men systemet kan innehålla fler lösningar. T ex skulle det givna ekvationssystemet kunna vara

$$0x + 0y + 0z = 0,$$

(vilket uppfyller alla formella krav på att vara ett linjärt ekvationssystem) och vars lösningsmängd består av alla taltriplar.

**SVAR:** Den enda information vi får ut av indata är att lösningsmängden innehåller de oändligt många lösningarna

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(-1, 1, -2)$$

där  $t$  kan vara vilket reellt tal som helst, men att detta inte behöver utgöra samtliga lösningar.

8. Finns det någon matris  $\mathbf{X}$  sådan att

$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Lösning:** Matrismultiplikation ger att kolonn ett multipliceras till kolonn ett, etc, så

$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Men då gäller att

$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{X} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

vilket strider mot förutsättningen att

$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OBS 1. Andra uppgiften på lappskrivningen kan eventuellt bli svårare än de fyra ovan.

OBS 2. Lösningar anslås på kurshemsidan senast helgen innan lappskrivningen.