

## SF1604 för F, ht13 - sammanfattning

- Projektioner och koordinater
  - Givet vektor  $v$  och linje  $L$ , skriv  $v = v_L + v_N$  (komposantuppdelning) där  $v_L$  är parallell med  $L$  och  $v_N$  är vinkelrät mot  $L$ .
  - $v_L$  kallas den *ortogonala projektionen av  $v$  på  $L$* .
  - Om  $W \subset V$  är ett underrum med ON-basen  $w_1, \dots, w_n$  ges  $P_W : V \rightarrow W$  av  $P_W(v) = \langle w_1, v \rangle w_1 + \langle w_2, v \rangle w_2 + \dots + \langle w_n, v \rangle w_n$ .
- Skalärprodukt
  - Om  $u$  är vektor,  $e$  en enhetsvektor som är parallell med linjen  $L$ , så är  $u_L = (u \cdot e)e$ , och  $|u_L| = u \cdot e$ .
  - Längd av vektor:  $|v|^2 = v \cdot v$ .
  - $u \cdot v = |u||v| \cos(\alpha)$  där  $\alpha$  är vinkeln mellan  $u, v$ .
  - $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u$  och  $v$  vinkelräta *eller* någon av  $u, v$  lika med nollvektorn.
  - Säger att  $u, v$  *ortogonala* om  $u \cdot v = 0$ .
  - Vektorna  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sägs vara *ortonormala* om  $v_i \cdot v_j = 0$  om  $i \neq j$ , och  $v_i \cdot v_i = 1$ . OBS: ortonormala vektorer är automatiskt linjärt oberoende.
  - ON-bas: bas av ortonormala vektorer. Hittas mha Gram-Schmidt.
- Vektor/kryss-produkt
  - $|u \times v| = |u||v| \sin(\alpha)$  där  $\alpha$  är vinkeln mellan  $u$  och  $v$ .
  - $u \times v$  vinkelrät mot både  $u$  och  $v$ .
  - Orientering:  $(u, v, u \times v)$  *högerorienterad*.
- Geometri
  - Ekvation för plan/linjer (med och utan parameterform.)
  - Skärning mellan {linje,plan} och {linje,plan}: lös ekvationssystem!
  - Avstånd mellan {punkt,linje,plan} till {linje,plan}: projicera! (Alternativ: ställ upp ekvationssystem för ortogonalitet etc och lös.)
- Matriser
  - Speciella matriser: enhetsmatriser, diagonala, över-triangulära, under-triangulära.
  - Transponat: med  $A = (a_{ij})$  är  $A^t = (a_{ji})$ .  $A$  är *symmetrisk* om  $A^t = A$ . Notera att  $(AB)^t = B^t A^t$ .
  - En linjär avbildning  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  kan beskrivas med en  $n \times m$  matris. ("Ta reda på var enhetsvektorerna tar vägen".)
  - Viktiga geometriska avbildningar: vridning, spegling, projektion.
- Ekvationssystem
  - Skrivs kort som:  $Ax = b$ .
  - Om  $b = 0$  finns alltid den *triviala lösningen*  $x = 0$ . Annars: lösning finns  $\Leftrightarrow b \in \text{Range}(A)$ .
  - Hur lösa? Gausselimination! (Gör radoperationer tills systemet blir på trappform, bakåtsubstituera sedan.)
  - Minstakvadratmetoden: Om  $Ax = b$  saknar lösning, hitta "bästa möjliga lösning", dvs minimera felet  $|Ax - b|$ . Hur? Lös

$$A^t Ax = A^t b.$$

- Determinanter
  - Geometrisk tolkning:  $|\det(A)|$  ger area/volymer (i  $\mathbb{R}^2$  respektive  $\mathbb{R}^3$ .)

- Viktig egenskap: determinanten som funktion i godtycklig rad/kolonn är linjär.
- $\det(A)$  oförändrad vid vissa rad/kolonnoperationer (t.ex. lägg till multipel av en rad till en annan rad.) *Byter tecken* om vi byter plats på två rader/kolonner.
- Regler:  $\det(A^t) = \det(A)$ ,  $\det(I) = 1$ ,  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .
- Uträkning av  $\det(A)$ .
  - \*  $2 \times 2$ : formel.
  - \*  $3 \times 3$ : formel eller Sarrus (men se även nedan.)
  - \*  $n \times n$ ,  $n > 3$ :
    - $\det(A)$  lätt att räkna ut om  $A$  är övertriangulär - "gör om"  $A$  till övertriangulär mha radoperationer.
    - Utveckling efter rad/kolonn (speciellt om en rad/kolonn har många nollor.)
- Determinanter och ekvationssystem
  - Om  $A$  är kvadratisk har ekvationssystemet  $Ax = b$ 
    - \* *precis en* lösning oavsett vad  $b$  är om  $\det(A) \neq 0$ .
    - \* ingen, eller oändligt många lösningar (det beror på  $b$ ) om  $\det(A) = 0$ .
  - Icke-kvadratiske system: om  $Ax = b$  har fler obekanta än ekvationer så har:
    - $Ax = 0$  oändligt många lösningar.
    - $Ax = b$ ,  $b \neq 0$  antingen oändligt många lösningar, eller ingen lösning.
  - Baser, beroende, oberoende.
    - *Linjärkombination*: uttryck på formen
 
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k$$
 där  $v_1, v_2, \dots, v_k$  är vektorer och  $x_1, \dots, x_k$  skalärer.
    - *Linjärt oberoende*:
 
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k = 0$$
 endast om  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ .
    - *Linjärt beroende*: kan hitta  $x_1, \dots, x_k$ , ej alla lika med noll, så att
 
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k = 0$$
.
    - Kolonnvektorer i en kvadratisk matris är oberoende  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .
    - *Bas* för  $\mathbb{R}^n$ : samling vektorer  $v_1, v_2, \dots, v_k$  så att
      - \*  $v_1, v_2, \dots, v_k$  är *oberoende*.
      - \* *Alla*  $w \in \mathbb{R}^n$  kan skrivas som
 
$$w = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k.$$
 ( $x_1, x_2, \dots, x_k$  kallas *koordinater* för  $w$  i basen  $v_1, \dots, v_k$ .)
    - Om  $v_1, v_2, \dots, v_n$  är *oberoende* vektorer i  $\mathbb{R}^n$  bildar de en bas.
  - Inverser
    - Om  $A$  är kvadratisk matris och  $B$  är en matris så att  $AB = BA = I$  (där  $I$  är identitetsmatrisen) är  $A$  *inverterbar*. Matrisen  $B$  skrivs oftast som  $A^{-1}$ .
    - $A$  inverterbar  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .
    - Hur finna  $A^{-1}$ ? Ställ upp ekvationssystem  $(A|I)$  och gör radoperationer tills du får  $(I|B)$ ;  $B$  är då inversen till  $A$ .
    - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

- Egenvärden/egenvektorer
  - Om  $A$  är kvadratisk matris,  $v \neq 0$  en vektor och  $\lambda \in \mathbb{R}$  så att

$$Av = \lambda v$$

säger vi att  $v$  är en *egenvektor* till  $A$  med *egenvärdet*  $\lambda$ .

- Hur hitta egenvärden? Lös ekvationen  $\det(A - \lambda I) = 0$ .
- Hur hitta egenvektor? Om  $\det(A - \lambda I) = 0$  så har  $(A - \lambda I)x = 0$  icke-triviala lösningar - lös ekvationssystemet!
- När kan vi hitta bas av egenvektorer?
  - \* Spektralsatsen: en  $n \times n$ -matris  $A$  har  $n$  stycken *reella* egenvärden och  $n$  stycken *ortogonala* egenvektorer  $\Leftrightarrow A^t = A$ .
  - \* Om  $\det(A - \lambda I) = 0$  har  $n$  stycken olika lösningar för en  $n \times n$ -matris  $A$ , så har  $A$   $n$  stycken oberoende egenvektorer.
  - \* Om  $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$  för alla egenvärden  $\lambda$ , dvs samma algebraisk och geometrisk multiplicitet.
- Om  $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k$  och  $v_1, \dots, v_k$  är egenvektorer till en matris  $A$ , så är

$$A^n w = x_1 \lambda_1^n v_1 + x_2 \lambda_2^n v_2 + \dots + x_k \lambda_k^n v_k$$

- Följd: Om  $\lambda_1 = 1$  och övriga egenvärden har belopp mindre än ett så är systemet *stabilt*, dvs  $A^n w$  går mot  $x_1 v_1$  då  $n \rightarrow \infty$ .

- Baser/koordinater:  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  bas för  $V$ .

- $v = \sum x_i v_i$  omm  $[v]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ .

$$v \in V \xrightarrow{T} V \ni Tv$$

- $[T]_B$  defineras av:
 
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ [v]_B \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{[T]_B} & \mathbb{R}^n \ni [Tv]_B \end{array}$$

- Hur byta bas? Lös ekvationssystem!
- Basbytesmatriser:  $B, D$  baser,  $[v]_D = P_{B \rightarrow D} [v]_B$ , där  $P_{B \rightarrow D}$  är basbytesmatrisen från  $B$  till  $D$ . Då gäller:

$$[T]_D = P_{B \rightarrow D} [T]_B P_{D \rightarrow B} = P_{D \rightarrow B}^{-1} [T]_B P_{D \rightarrow B}$$

eftersom  $P_{B \rightarrow D} = P_{D \rightarrow B}^{-1}$ .

- Låt  $T : V \rightarrow W$  vara linj. avb. Om  $B = (u_1, \dots, u_n)$  är bas för  $V$ , och  $B'$  är bas för  $W$  så fås matrisen för  $T$ , relativt baserna  $B$  och  $B'$  av

$$[T]_{B', B} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline [T(u_1)]_{B'} & [T(u_2)]_{B'} & \dots & [T(u_n)]_{B'} \\ \hline & & & \end{array} \right]$$

- Abstrakta vektorrum.
  - Underrum, beroende/oberoende, bas, dimension.
  - $F : V \rightarrow W$ .
    - \*  $\ker(F) \subset V$ ,  $\text{Range}(F) \subset W$  (underrum!).
    - \*  $\dim(\ker(F)) + \dim(\text{Range}(F)) = \dim(V)$
  - Om  $\dim(V) < \infty$  och  $F : V \rightarrow V$  så är  $F$  surj. omm  $F$  injektiv.
- Diagonalisering: givet kvadratisk matris  $A$ , hitta *diagonal* matris  $D$  och *inverterbar* matris  $P$  så att

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$$

– Kan diagonalisera en  $n \times n$ -matris  $A \Leftrightarrow$  matrisen  $A$  har  $n$  oberoende egenvektorer.

\* Om  $v_1, v_2, \dots, v_n$  är egenvektorer till  $A$ , med egenvärden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , så är

$$P = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

och  $D$  är diagonalmatrisen med  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  på diagonalen.

– Om  $A = PDP^{-1}$  så är  $A^n = PD^nP^{-1}$ . (Poäng:  $D^n$  lätt att beräkna.)

– Om  $A^t = A$  kan vi hitta *ortogonal* diagonalisering, dvs  $P$  är ortogonal.

• Kvadratiska former

– Kan skrivas  $q(x) = x^tAx$  där  $A$  är symmetrisk och  $x = [x_1, \dots, x_n]^t \in \mathbb{R}^n$ .

– Om egenvärdena till  $A$  är  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , så är

\*  $A$  *positivt definit* om  $\lambda_1 > 0$ . ( $q$  *positivt definit* om  $q(x) > 0$  för  $x \neq 0$ .)

\*  $A$  *indefinit* om egenvärdena har olika tecken, dvs  $\lambda_1 < 0, \lambda_n > 0$ .

\*  $\lambda_1|x|^2 \leq q(x) \leq \lambda_n|x|^2$  gäller för all  $x \in \mathbb{R}^n$

\* Om  $P^{-1}AP = P^tAP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  sägs variabelbytet  $x = Py$  *diagonalisera den kvadratiska formen*  $q$ ; vi får  $x^tAx = y^tP^tAPy = y^tDy = \lambda_1y_1^2 + \dots + \lambda_ny_n^2$ .

\*  $P$  ortogonal ger att principalaxlarna för  $q$  är vinkelräta.