

Matematiska Institutionen,
KTH

**Problem till övning nr 3 den 2 april, Diskret matematik CINTE,
SF1610, vt 14.**

1. (E) Visa med ett induktionsbevis att

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

för varje naturligt tal $n \geq 1$.

2. (D) Visa att $n^3 - n$ är delbart med 6 för varje positivt heltal n .
3. (C) Den oändliga talföljden a_0, a_1, \dots definieras rekursivt genom

$$a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \quad \text{för } n = 2, 3, 4, \dots$$

samt $a_0 = 2$ och $a_1 = 7$. Visa att $a_n = 3^n + 4^n$ för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

4. (E) Bestäm antalet element i mängden $\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2\}$.

5. (E) Betrakta mängderna

$$A = \{1, 2, 4, 8, 9, 11, 17\}, \quad B = \{4, 5, 6, 8, 9\}, \quad C = \{2, 4, 7, 9\}.$$

Bestäm

$$(A \cup B) \setminus (B \cap C)^\sim,$$

där X^\sim betecknar komplementet till mängden X .

6. (E) Mängden $\{\emptyset, \{0\}, \{0, \emptyset\}\}$ har åtta olika delmängder. Bestäm samtliga dessa delmängder.
7. (E) Låt \mathcal{R} vara följande relation på mängden $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 3), (4, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

Bestäm den "minsta" ekvivalensrelation \mathcal{S} som innehåller \mathcal{R} . Ange också de ekvivalensklasser som \mathcal{S} inducerar på \mathcal{M} .

8. (E) Betrakta mängden $\mathcal{M} = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 13\}$. Vi definierar en relation \mathcal{R} på \mathcal{M} genom $a\mathcal{R}b$ om talet 3 delar talet $a - b$. Visa att \mathcal{R} definierar en ekvivalensrelation på \mathcal{M} och bestäm de ekvivalensklasser som denna relation inducerar på \mathcal{M} .
9. (C) Låt f vara en funktion från A till B och låt g vara en funktion från B till C . Visa att om både f och g är bijektiva funktioner så är också sammansättningen $g \circ f$ en bijektiv funktion från A till C .
10. (C) Visa att unionen av två uppräknligt oändliga mängder är en uppräknligt oändlig mängd.
11. (B) Antag att mängderna A_1, A_2, A_3, \dots bildar en oändlig samling uppräknligt oändliga mängder. Är unionen av dessa mängder en uppräknligt oändlig mängd?