Matematiska Institutionen, KTH

Problem till övning nr 6 den 16 april, SF1610, vt 14.

1. (E) Bestäm samtliga cykliska delgrupper till gruppen $G = (Z_{10}, +)$. Bestäm också ordningen av samtliga element i G. Förklara varför elementen i mängden $K = \{0, 3, 7\}$ inte utgör en delgrupp till G.

2. (E) Betrakta gruppen $G = (Z_{12}, +)$. Elementen i mängden $H = \{0, 4, 8\}$ bildar en delgrupp till G. Bestäm samtliga sidoklasser till H i G.

3. (E) Nedanstående tabell kan fyllas i så att det blir multiplikationstabellen till en grupp. Fyll i tabellen så den blir komplett och bestäm $a^3 = a \circ a \circ a$.

$\circ$	e	a	b	c	d	f
e		a	b			
a			f	d		b
b				f		c
c		f			b	a
d					f	e
f		c	a		e	

4. (D) Bestäm den minsta delgrupp till gruppen $G = (Z_{18}, +)$ som innehåller elementen 3 och 8.

5. (C) Visa att nedanstående tabell inte är en multiplikationstabell till en grupp:

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	d	e	c
b	b	e	c	d	a
c	c	d	a	b	e
d	d	c	e	a	b

6. (B) Kan nedanstående tabell kompletteras till multiplikationstabellen till en grupp?

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e				
a		e			
b					
c					
d					

7. (B) Visa att för varje par av delgrupper H och K till en grupp G så gäller att $H \cap K$ är en delgrupp till G.

8. (C) Antag att H och K är delgrupper till en grupp G. Om $|H| = 52$ och $|K| = 151$, hur många element har då $H \cap K$.

9. (C) Visa att gruppen $(Z_{11} \setminus \{0\}, \cdot)$ är en cyklisk grupp och bestäm en generator för gruppen.

SVAR.

1. $H_1 = \{0\}$, G, $H_2 = \langle 2 \rangle = \{2, 4, 6, 8, 0\}$, $H_3 = \langle 5 \rangle = \{5, 0\}$ är de cykliska delgrupperna. Elementet 0 har ordning 1, alla element utom 0 i H_2 har ordning 5, elementet 5 har ordning 2, övriga element har ordning 10.

2. $H = 0 + H$, $1 + H = \{1, 5, 9\}$, $2 + H = \{2, 6, 10\}$, $3 + H = \{3, 7, 11\}$.

3. $a^3 = a$.

$\circ$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	d	e	f	a	c
c	c	f	d	e	b	a
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

4. G.

5. —

6. Nej

7. —

8. 1

9. Till exempel elementet 2, (eller 8, eller 7, eller 5).