KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus
15	G	1

Efternamn	förnamn	pnr	kodnr

Lösning till kontrollskrivning 1B, 9 april 2014, 10.45–11.45,
i SF1610 Diskret matematik för CINTE, CMETE mfl.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Om 87 delar produkten ab av två hela tal a och b så måste 87 dela minst ett av talen a och b.		x
b)	Om $\text{sgd}(a, b) = D$ så är $\text{sgd}(a^2, b^2) = D^2$.	x	
c)	Alla hela tal a sådana att $a \equiv 32 (\text{mod } 48)$ är delbara med 16.	x	
d)	Det finns precis 50 (multiplikativt) inverterbara element i ringen Z_{51}		x
e)	Om $A \subseteq B$ så är $B^{\sim} \subseteq A^{\sim}$, (där $X^{\sim}$ betecknar komplementet till X).	x	
f)	Det finns minst en bijektion från de hela talen till de rationella talen.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt $A = \{\emptyset, 0, \{0\}, \{\{0\}\}\}$. Ange tre delmängder B, C och D till A sådana att $|B| = 1$, $|C| = 2$, $|D| = 3$ och $B \subseteq C \subseteq D$.

SVAR: Till exempel

$$B = \{\emptyset\}, \qquad C = \{\emptyset, 0\}, \qquad D = \{\emptyset, 0, \{0\}\}.$$

b) (1p) Ange ett element x i ringen Z_{19} sådant att $2x + 9 = 4$.

SVAR: $x = 7$.

c) (1p) På mängden $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definieras en relation $\mathcal{R}$ genom

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$$

Vilken eller vilka av de tre egenskaperna reflexiv, symmetrisk och transitiv har denna relation?

SVAR: Ingen av egenskaperna.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm samtliga par av hela tal x och y som satisfierar den Diofantiska ekvationen

$$64x + 75y = 1$$

Lösning. Euklides algoritm ger

$$75 = 64 + 11, \qquad 64 = 6 \cdot 11 - 2, \qquad 11 = 5 \cdot 2 + 1$$

varur vi härleder att

$$1 = 11 - 5 \cdot 2 = 11 - 5(6 \cdot 11 - 64) = -29 \cdot 11 + 5 \cdot 64 =$$
$$= -29(75 - 64) + 5 \cdot 64 = 64 \cdot 34 + 75 \cdot (-29).$$

En lösning är alltså $(x, y) = (34, -29)$. Eftersom talen 64 och 75 är relativt prima får vi, enligt känd formel, alltså alla lösningar till

SVAR:

$$\begin{cases} x &= & 34 &+ & 75k \\ y &= & -29 &+ & 64k \end{cases}$$

där k är ett godtyckligt heltal.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm $47^{109} (\text{mod } 15)$.

Lösning.

$$47^{109} \equiv_{15} 2^{109} \equiv_{15} (2^4)^{27} \cdot 2 \equiv_{15} 1^{27} \cdot 2 \equiv_{15} 2.$$

SVAR: 2.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) En talföljd $a_0, a_1, ...$ definieras rekursivt genom att $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ och

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},$$

för $n = 2, 3 \ldots$. Ge ett induktionsbevis för att $a_n = 2^n + 1$.

Lösning. Sätt $b_n = 2^n + 1$. Vi skall visa att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi finner att

1. $a_0 = 2$ och $b_0 = 2$, och $a_1 = 3$ och $b_1 = 2^1 + 1 = 3$. Alltså $a_0 = b_0$ och $a_1 = b_1$.
2. Vi visar implikationen

$$\begin{cases} a_{n-1} &= b_{n-1} \\ a_{n-2} &= b_{n-2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = b_n.$$

Vi finner att om $a_{n-1} = b_{n-1}$ och $a_{n-2} = b_{n-2}$ så är

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3b_{n-1} - 2b_{n-2} = 3(2^{n-1} + 1) - 2(2^{n-2} + 1) =$$
$$= 3 \cdot 2 \cdot 2^{n-2} + 3 - 2 \cdot 2^{n-2} - 2 = 4 \cdot 2^{n-2} + 1 = 2^n + 1 = b_n,$$

vilket skulle visas.

3. Enligt induktionsprincipen gäller nu påståendet för $n = 0, 1, 2, \ldots$.