

**KTH Matematik**  
Olof Heden

$\Sigma$ p	G/U	bonus
15	G	1

Efternamn	förnamn	pnr	kodnr

**Lösning till kontrollskrivning 1C, 9 april 2014, 10.45–11.45,  
i SF1610 Diskret matematik för CİNTE, CMETE mfl.**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks  $n$  medför godkänd uppgift  $n$  vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år),  $n = 1, \dots, 5$ .

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.

**Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.**

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

**Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!**

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar  $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar  $-\frac{1}{2}$ p.

Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

**Kryssa för** om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	falskt
a) Om 87 delar produkten $ab$ av två hela tal $a$ och $b$ så måste 87 dela minst ett av talen $a$ och $b$ .		x
b) Om $\text{sgd}(a, b) = D$ så är $\text{sgd}(a^2, b^2) = D^2$ .	x	
c) Alla hela tal $a$ sådana att $a \equiv 32 \pmod{48}$ är delbara med 16.	x	
d) Det finns precis 50 (multiplikativt) inverterbara element i ringen $Z_{51}$		x
e) Om $A \subseteq B$ så är $B^{\sim} \subseteq A^{\sim}$ , (där $X^{\sim}$ betecknar komplementet till $X$ ).	x	
f) Det finns minst en bijektion från de hela talen till de rationella talen.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

**2a)** (1p) Låt  $A = \{\emptyset, 0, \{0\}, \{\{0\}\}\}$ . Ange tre delmängder  $B$ ,  $C$  och  $D$  till  $A$  sådana att  $|B| = 1$ ,  $|C| = 2$ ,  $|D| = 3$  och  $B \subseteq C \subseteq D$ .

**SVAR:** Till exempel

$$B = \{\emptyset\}, \quad C = \{\emptyset, 0\}, \quad D = \{\emptyset, 0, \{0\}\}.$$

**b)** (1p) Ange ett element  $x$  i ringen  $Z_{19}$  sådant att  $2x + 9 = 4$ .

**SVAR:**  $x = 7$ .

**c)** (1p) På mängden  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  definieras en relation  $\mathcal{R}$  genom

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

Vilken eller vilka av de tre egenskaperna reflexiv, symmetrisk och transitiv har denna relation?

**SVAR:** Ingen av egenskaperna.

Namn	poäng uppg.3

**3)** (3p) Bestäm samtliga par av hela tal  $x$  och  $y$  som satisfierar den Diofantiska ekvationen

$$64x + 75y = 1$$

**Lösning.** Euklides algoritm ger

$$75 = 64 + 11, \quad 64 = 6 \cdot 11 - 2, \quad 11 = 5 \cdot 2 + 1$$

varur vi härleder att

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 5 \cdot 2 = 11 - 5(6 \cdot 11 - 64) = -29 \cdot 11 + 5 \cdot 64 = \\ &= -29(75 - 64) + 5 \cdot 64 = 64 \cdot 34 + 75 \cdot (-29). \end{aligned}$$

En lösning är alltså  $(x, y) = (34, -29)$ . Eftersom talen 64 och 75 är relativt prima får vi, enligt känd formel, alltså alla lösningar till

**SVAR:**

$$\begin{cases} x = 34 + 75k \\ y = -29 + 64k \end{cases}$$

där  $k$  är ett godtyckligt heltal.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm  $47^{109} \pmod{15}$ .

**Lösning.**

$$47^{109} \equiv_{15} 2^{109} \equiv_{15} (2^4)^{27} \cdot 2 \equiv_{15} 1^{27} \cdot 2 \equiv_{15} 2.$$

**SVAR:** 2.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) En talföljd  $a_0, a_1, \dots$  definieras rekursivt genom att  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 3$  och

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},$$

för  $n = 2, 3, \dots$ . Ge ett induktionsbevis för att  $a_n = 2^n + 1$ .

**Lösning.** Sätt  $b_n = 2^n + 1$ . Vi skall visa att  $a_n = b_n$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Vi finner att

1.  $a_0 = 2$  och  $b_0 = 2$ , och  $a_1 = 3$  och  $b_1 = 2^1 + 1 = 3$ . Alltså  $a_0 = b_0$  och  $a_1 = b_1$ .

2. Vi visar implikationen

$$\begin{cases} a_{n-1} = b_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-2} \end{cases} \implies a_n = b_n.$$

Vi finner att om  $a_{n-1} = b_{n-1}$  och  $a_{n-2} = b_{n-2}$  så är

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3b_{n-1} - 2b_{n-2} = 3(2^{n-1} + 1) - 2(2^{n-2} + 1) = \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 2^{n-2} + 3 - 2 \cdot 2^{n-2} - 2 = 4 \cdot 2^{n-2} + 1 = 2^n + 1 = b_n, \end{aligned}$$

vilket skulle visas.

3. Enligt induktionsprincipen gäller nu påståendet för  $n = 0, 1, 2, \dots$ .