KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	ååmmdd	kodnr

Lösning till kontrollskrivning 5B, den 15 maj 2014, kl 13.00-14.00
i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Den kompletta grafen K_6 är planär.		x
b)	Varje cykel i en bipartit graf har jämn längd, dvs antalet kanter som passeras när man följer cykeln är jämnt.	x	
c)	I varje graf med v noder, e kanter och c komponenter gäller att $e > v - c$.		x
d)	Varje komplett bipartit graf $K_{n,n}$ där $n \geq 2$ har en Hamiltoncykel.	x	
e)	I den kompletta bipartita grafen $K_{n,m}$ med n st X-noder och m st Y-noder finns alltid en komplett matchning där varje X-nod matchas med en Y-nod.		x
f)	En sammanhängande graf har minst två uppspännande träd om och endast om grafen har minst en cykel.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) En plan ritning av den sammanhängande planära grafen G har 14 områden ("ytterområdet" medräknat). Antalet kanter är 101. Hur många noder har grafen?

(Svara bara.)

SVAR: 89.

b) (1p) Grafen G har 99 noder. Motivera varför minst en av noderna har en valens (grad) som är ett jämnt tal.

(Svara bara.)

SVAR: Summan av ett udda antal udda tal är udda, så om alla de udda noderna hade en udda valens skulle valenssumman vara udda. Men valenssumman är alltid två gånger antalet kanter, så ett jämnt tal.

c) (1p) Redogör för Halls bröllopssats.

SVAR: Se läroboken, t ex.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Rita en graf med 14 noder, varav 9 har valens (grad) 2 och 5 har valens (grad) 4, som saknar Hamiltoncykel men har en Eulerkrets (dvs har en sluten Eulerväg).

OBS. Ditt svar skall motiveras.

Lösning. Rita en 3-cykel och en 12-cykel som har precis en gemensam nod, noden v. Fyra av noderna i 12-cykeln binds ihop med kanter till en 4-cykel. Alla noder har en jämn valens så grafen har, enligt en känd sats, en Eulerkrets. För att kunna besöka alla noder minst en gång måste noden v passeras minst två gånger, så en Hamiltoncykel saknas.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Den bipartita grafen G har två mängder X och Y av noder. Det finns inga kanter mellan noder i X och inga kanter mellan noder i Y. Varje nod i mängden X har valensen (graden) 6 och varje nod i mängden Y har valensen (graden) 7. Det finns 91 noder i X, (dvs $|X| = 91$). Bestäm antalet noder i Y. **OBS. Ditt svar skall motiveras.**

Lösning. Varje kant utgår från en nod i X. Varje nod i X träffas av 6 kanter. Då det finns 91 stycken X-noder är antalet kanter lika med $91 \cdot 6$. Motsvarande beräkning av antalet kanter kan göras utifrån Y-nodernas perspektiv. Antalet kanter i grafen blir då $|Y| \cdot 7$. Vi får likheten

$$|Y| \cdot 7 = 91 \cdot 6,$$

vilket ger

SVAR: $|Y| = 91 \cdot 6/7 = 78.$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Finns det någon sammanhängande graf som har 14 noder med valens (grad) 1, 25 noder med valens (grad) 2 och 10 noder med valens (grad) 3, men som saknar noder med valens (grad) 0, 4, 5, 6, etc.
OBS. Ditt svar skall motiveras.

Lösning. Sambandet summa valenserna är lika med två gånger antalet kanter ger att antalet kanter är

$$|E| = \frac{14 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 10 \cdot 3}{2} = 47.$$

Antalet noder är $|V| = 14 + 25 + 10 = 49$. Vore grafen sammanhängande skulle den då ha ett spännande träd, bestående av $|V| - 1 = 48$ stycken av grafens kanter. Men det finns bara 47 kanter att tillgå, så grafen kan inte vara sammanhängande.