SF1633 Differentialekvationer I.
MODULUPPGIFTER 1.
Första ordningens differentialekvationer med modeller.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{d}{dx}(xy) = y^2\sqrt{x}$, som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.
Ange även lösningens existensintervall.

2. Låt y_1 vara en lösning till den homogena differentialekvationen $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$.
<u>Härled</u> en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$.

3. Bestäm en kontinuerlig funktion som är styckvis deriverbar och uppfyller begynnelsevärdesproblemet
$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x , & 0 \le x < 1 \\ -x , & x \ge 1 \end{cases}$, $y(0) = 0$. Bestäm även $y(\sqrt{2})$.

4. Är följande påståenden sanna eller falska? Motivera!
a) Låt $y = \Phi(x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y' = y^2 + 4$.
Lösningskurvan har lokala extrempunkter.
b) Begynnelsevärdesproblemet $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$ har entydig lösning.
c) Betrakta differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, där f och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i ett rektangulärt område R i xy-planet.
Två skilda lösningskurvor kan skära varandra i en punkt.

5. a) En lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' = y^3$, $y(0) = 0$ ges av $y \equiv 0$.
Är lösningen entydig? Motivera!
b) $y = x^3$ är en lösning till $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$. Är lösningen entydig? Motivera!
c) Ange det största intervall i vilket lösningen till ekvationen $y' = 3x^2(y^2 + 1)$, $y(0) = 1$ existerar.
Är lösningen entydig? Motivera!

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' + y + xy^2 = 0$ som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.
Bestäm även lösningens existensintervall.

7. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen
$y' = y(2 - y)(4 - y)$. Bestäm de startvärden y_0 för vilka $\lim_{x\to\infty} y(x)$ är ändligt.
OBS ! Man behöver ej lösa ekvationen.

8. En modell för antalet $P(t)$ kaniner i ett område ges av begynnelsevärdesproblemet
$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P)$, $P(0) = 5000$.
($P(t)$ betraktas då som en kontinuerlig variabel trots att antalet kaniner givetvis är ett heltal.)
a) Vad blir $\lim_{t\to\infty} P(t)$?
b) Vid vilken tidpunkt T är $P(T) = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} P(t)$ i a) ? Exakt svar skall ges.

9. Beståndet, $y(t)$, mätt i ton, av en viss fiskart i en viss sjö antas variera cykliskt(periodiskt) med tiden t, mätt i månader, enligt följande: y :s ändringshastighet (som kan vara både positiv och negativ) är proportionell mot produkten av y och den cykliska faktorn $\cos\frac{\pi t}{6}$. På morgonen den 16 maj (väljes som $t = 0$) är $y = 1$ ton och den 16 augusti är $y = 3$ ton. Bestäm $y(t)$ som funktion av t.

Bestäm även de största och minsta värdena som $y(t)$ antar och vid vilka tidpunkter som detta sker.

10. Bestäm en icke-konstant funktion, vars kvadrat plus kvadraten på dess derivata är lika med ett.

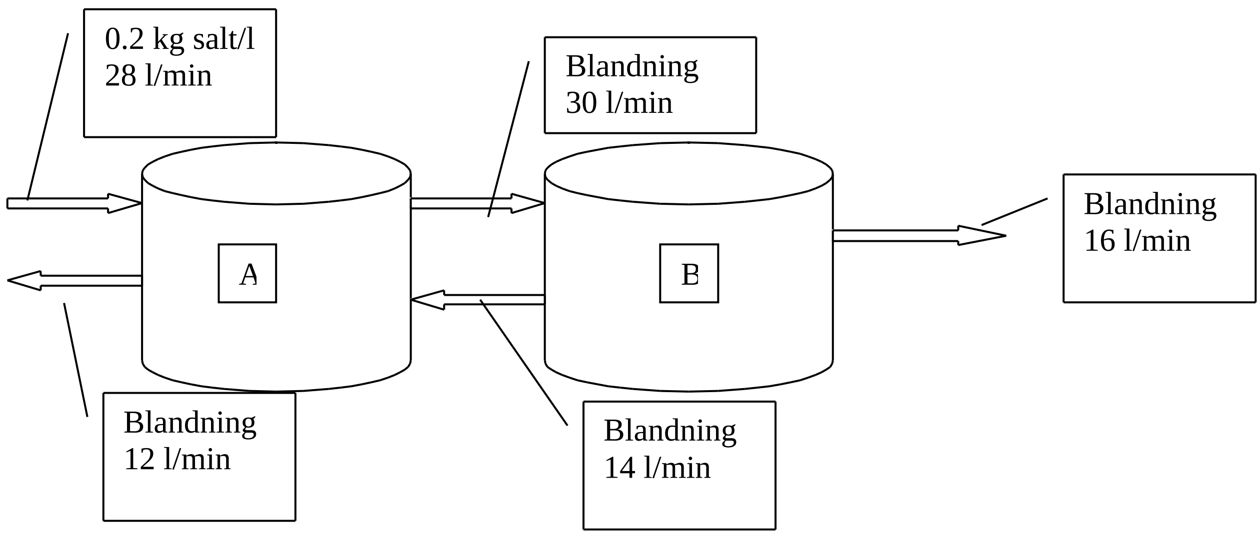
11. I en enkel populationsmodell för antalet individer, $P(t)$, är den relativa tillväxthastigheten konstant, a.
I en annan modell är den relativa tillväxthastigheten summan av två termer.
Den ena termen är en positiv konstant, a, och den andra termen är proportionell mot populationen med en negativ proportionalitetskonstant, b.
En tredje modell erhålles genom att korrigera den andra modellen på följande sätt:
avlägsna ett konstant antal per tidsenhet, c.
Ställ upp dessa modeller.
Studera därefter vad som händer efter lång tid, då konstanterna sätts till $a = 5$, $b = -1$ och $c = 4$.

12. En tavla som är till salu påstås vara 400 år gammal. Pigment i målningen innehåller vitt bly med halveringstiden 22 år. Noggranna mätningar ger vid handen att 31/32 av den ursprungliga mängden vitt bly har sönderfallit. Antag att sönderfallshastigheten är proportionell mot mängden vitt bly. Är en tavelskojare i farten? Avgör tavlans ålder.

13. En partikel rör sig längs en x-axel så att dess hastighet i axelns riktning är proportionell mot kvadraten på x-koordinaten $x(t)$.
Proportionalitetskonstanten antas vara 1 (dimension $m^{-1}s^{-1}$ om längd och tid mäts i m respektive s).
Vid tiden $t = 0$ har partikeln koordinaten $p \neq 0$.
a) Bestäm $x(t)$ för $t \geq 0$.
b) Undersök om partikeln för lämpliga val av p kan nå origo eller försvinna obegränsat bort från origo inom <u>ändlig</u> tid. Ange i så fall hur lång tid detta tar, som funktion av p.

14. Tentamenskonstruktören håller på att baka en kaka och inser då att ett lämpligt tentamensproblem kan formuleras enligt följande:
En kaka tas ur ugnen. Efter 10 minuter är kakan 105°C och efter 30 minuter är kakan 65°C. Vid vilken tidpunkt, kaktemperaturen är då 35°C, kan en smakbit erhållas ?
Avsvalningshastigheten antas vara proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_0$, där T_0 är rumstemperaturen 25°C och T är kakans temperatur i °C.

15. Två tankar A och B innehåller 400 liter saltlösning vardera. Den välblandade vätskan pumpas mellan, in i och ut ur tankarna enligt figur. Ställ upp en matematisk modell för mängden av salt i tankarna vid varje tidpunkt t. Modellens ekvationer behöver ej lösas.



16. För en duvart gäller, att den dör ut om inte antalet individer N inom ett visst område överskrider ett tröskelvärde $T > 0$. Å andra sidan finns en nivå $K > T$ sådan att tillgången på föda bara räcker till K individer. Om den spontana tillväxtkoefficienten är $r > 0$, så modelleras ovanstående med följande differentialekvation för $N = N(t)$ som funktion av tiden t : $$\frac{dN}{dt} = -r\left(\frac{N}{T} - 1\right)\left(\frac{N}{K} - 1\right)N \ .$$
Studera denna icke-linjära differentialekvation enligt följande:

a. Bestäm alla stationära lösningar (dvs lösningar $N(t) =$konstant).

b. Avgör för varje stationär lösning om den är stabil eller inte.

c. Kommentera även rimligheten i det erhållna resultatet.

17. En tank innehåller 300 liter vatten i vilket 1800 gram salt har lösts.
En annan saltlösning med koncentrationen 5 gram per liter pumpas in med hastigheten 2 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.
Bestäm saltmängden som funktion av tiden. Under hur lång tid gäller detta ?

18. Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet de stationära lösningarna till den autonoma differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = y(y-1)$.
Bestäm de startvärden y_0 för vilka $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$ är ändligt.

19. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = y(y-1)$.
Dock behöver ej konstantlösningarna anges.
Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret

a) $y(0) = 2$ b) $y(0) = \dfrac{1}{2}$

Ange lösningens existensintervall och vad som händer då x växer.

20. Då en produkt tas ut ur en ugn har den temperaturen 700°C (Celsius).
Den svalnar därefter med en avsvalningstakt som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan produkten själv och det omgivande rummet. En konsult har hyrts in för att utreda denna avsvalningsprocess.
Konsulten föreslår två olika matematiska modeller.
Låt $T(t)$ vara produktens temperatur vid tiden t.
Modell1: $\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{T-40}{3}$. Modell 2: $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{T-30}{3}$.
Avgör vilken modell som kan vara lämplig och bestäm dess lösning.
Vad är produktens temperatur efter lång tid ?

21. Bestäm värdet på x så att $y(x) = 4$, då $(x-2)y' + y = 2x$ och $y(0) = 3$.

22 Undersök om differentialekvationen $x(x+1)y' - 2(x+1)y + x^2 = 0$, $x > 0$ har några lösningar $y(x)$ med egenskapen att $\dfrac{y(x)}{x} \to 1$, då $x \to \infty$.
Ange alla sådana lösningar, om de nu finns.

LEDNINGAR:

1. Differensekvationen är ej på standardform. Utför deriveringen. Vi har fått en känd typ av differentialekvation.
För att bestämma existensintervallet undersöks när funktionen blir obegränsad.
Tag det intervall som innehåller det aktuella värdet på x.
2. Bestäm först y_1 och ersätt därefter den obestämda konstanten med en funktion av x.
Sätt därefter in i den inhomogena differentialekvationen och utnyttja att y_1 är en lösning till den homogena differentialekvationen.
3. Bestäm först den allmänna lösningen. En av konstanterna bestäms med hjälp av villkoret och den andra konstanten kan bestämmas med hjälp av kontinuitetsvillkoret.

4.a) Studera derivatans tecken.
4.b) Studera entydighetssatsen.

Försök därefter att finna två lösningar som uppfyller differentialekvationen och villkoret.
4.c) Studera entydighetssatsen.
5.a) Studera entydighetssatsen.
5.b) Studera entydighetssatsen.
Försök därefter att finna två lösningar som uppfyller differentialekvationen och villkoret.
5.c) Studera entydighetssatsen. Bestäm den lösning som uppfyller differentialekvationen och villkoret.
6. Undersök var funktionen blir obegränsad. Tag det intervall som innehåller aktuellt x-värde.
7. Bestäm först de stationära punkterna. Studera därefter derivatan.
8.a) Gör en kvalitativ analys.
8.b) Lös först begynnelsevärdesproblemet. Bestäm därefter tidpunkten T.
9. Ställ upp differentialekvationen. Glöm inte proportionalitetskonstanten.
Använd villkoren för att bestämma konstanterna.
Vilka värden kan sinusfunktionen anta och när ?
10. Ställ upp differentialekvationen.
11. Ställ upp differentialekvationerna och studera dessa kvalitativt.
12. Ställ upp differentialekvationen. Lös begynnelsevärdesproblemet.
13. Ställ upp differentialekvationen. Lös begynnelsevärdesproblemet.
14. Ställ upp differentialekvationen. Glöm inte proportionalitetskonstanten.
Lös differentialekvationen. Allmänna lösningen är $T(t) = Ae^{kt} + T_0$.
Konstanterna bestäms med hjälp av villkoren.
15. Betrakta förändringen av saltmängd per tidsenhet i respektive tank.
16.a. Derivatan är lika med noll för stationära lösningar.
16.b. Gör kvalitativ analys.
16.c. Studera långtidsbeteendet.
17. Betrakta förändringen av saltmängd per tidsenhet i tanken.
Vad händer med vätskemängden ?

SVAR**:**

1. Differentialekvationens lösning är $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(2-\sqrt{x})}$. Lösningens existensintervall är $\{x \ : \ 0 < x < 4\}$.

2. Se avsnitt 2.3. i kursboken.

3. Den sökta lösning är $y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2(1+x^2)} \ , & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{2-x^2}{2(1+x^2)} \ , & x \ge 1 \end{cases}$.

Det sökta funktionsvärdet är $y(\sqrt{2}) = \dfrac{2-2}{4(1+2)} = 0$.

4. Alla tre påståendena är falska.

5 . a) Entydig lösning. b) Ej entydig lösning.

c) Det största intervallet i vilket lösningen existerar är $\left\{x : -\sqrt[3]{\dfrac{3\pi}{4}} < x < \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}}\right\}$. Entydig lösning.

6. Differentialekvationens lösning är $y = \dfrac{1}{x(1+\ln x)}$. Existensintervallet är $\{x \ : \ x > e^{-1}\}$.

7. $y_1 = 0$ är en instabil kritisk punkt. $y_2 = 2$ är en stabil kritisk punkt. $y_3 = 4$ är en instabil kritisk punkt.
$\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$ är ändligt för de startvärden y_0 som uppfyller $0 \le y_0 \le 4$.

8. a) $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = 10^6$. b) $T = 10 \ln 199$.

9. Beståndet uppfyller differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = ky \cos\frac{\pi}{6}t$ och är $y(t) = 3^{\sin\frac{\pi}{6}t}$.

Beståndet är störst den 16 augusti varje år och är lika med 3 ton.

Beståndet är minst den 16 februari varje år och är lika med $\frac{1}{3}$ ton.

10. **En** icke-konstant funktion är $y = \sin x$.

11. Modell 1: $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a \quad , \frac{dP}{dt} = aP$.

Modell 2: $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a + bP \ , \ \frac{dP}{dt} = P(a+bP) \quad ,b < 0$.

Modell 3: $\frac{dP}{dt} = P(a+bP) - c$.

Modell 1: P växer obegränsat då t växer.

Modell 2: Efter lång tid kommer blir $P = 5$.

Modell 3: Efter lång tid blir $P: 0$ då $P < 1$, 1 då $P = 1$ och 4 då $1 < P$.

12. Det är en tavelskojare i farten, ty tavlans ålder är 110 år, ej 400 år.

13. a) $x(t) = \frac{p}{1 - tp}$ b) Partikeln försvinner obegränsat långt bort inom $\frac{1}{p}$ sekunder för $p > 0$.

14. Efter 70 minuter kan en smakbit erhållas.

15. $\begin{cases} \frac{dS_1(t)}{dt} = 5.6 - \frac{21S_1(t)}{200} + \frac{7S_2(t)}{200} \\ \frac{dS_2(t)}{dt} = \frac{3S_1(t)}{40} - \frac{3S_2(t)}{40} \end{cases}$

16. a. De stationära lösningarna är $N = T$, $N = K$ och $N = 0$.
    b. Lösningarna $N = 0$ och $N = K$ är stabila medan $N = T$ är instabil.
    c. Resultatet är rimligt eftersom antalet individer går mot noll efter lång tid,
       dvs duvarten dör ut om antalet är mindre är tröskelvärde $T > 0$.
       Vidare går antalet individer efter lång tid mot K individer till vilka födan räcker.

17. Observera att tanken blir tom efter 300 minuter. $A(t) = 5(300 - t) + \frac{(300-t)^3}{(300)^2}$.

18. $y_1 = 0$ är stabil och $y_2 = 1$ är instabil. $\lim_{x \to \infty} y(x)$ är ändligt för $\{y_0 : y_0 \leq 1\}$.

19.a) $y = \frac{2}{2 - e^x}$, existensintervallet $\{x : x < \ln 2\}$ och y växer obegränsat.

19.b) $y = \frac{1}{1 + e^x}$, existensintervallet $\{x : x \quad R\}$ och y går mot noll.

20. Endast modell 1 är rimlig. Modell 1: $T(t) = 660e^{-\frac{t}{3}} + 40$. Produktens temperatur blir 40 "C.

21. Det entydiga värdet på x ges av $x = 2 - \sqrt{2}$.

22 Den sökta lösningen är $y = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \quad , x > 0$.