SF1633 Differentialekvationer I.
MODULUPPGIFTER 3.
Fourierserier, partiella differentialekvationer och laplacetransformer.

1. Undersök om funktionsföljden $\{1,\ \cos mt,\ \sin nt\}$ där $m = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$ och $n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$ är ortogonal på intervallet $(-\pi, \pi)$. Uttryck därefter den 2π-periodiska funktionen f med hjälp av denna funktionsföljd då $f(t) = t,\ -\pi < t < \pi$.

2.a. Visa att $\{\sin nx\}$, $n = 1,\ 2,\ 3$, utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0, \pi]$.
2.b. Skriv funktionen $f(x) = \sin^3 x$ på intervallet $[0, \pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner ovan.
2.c. Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad 0 < x < 3$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie.
Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar mot för $x = 0$.

3. För den 2π-periodiska funktionen f gäller att: $f(t) = \pi^2 - t^2 \quad , -\pi < t < \pi$.
Bestäm f:s fourierserie.
Använd sedan den erhållna serien för att beräkna summorna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

4. Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen $f(x) = |x| + x \quad , -1 < x < 1$.
Bestäm vidare Fourierseriens värde för $x = 1$.

5. I ett tabellverk hittar man att $s(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2}$ är lika med $\dfrac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2)$, då $0 < x < 1$.
Beräkna $s(-8/3)$.

6. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,\ldots.$ så att $\cos 2x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

7. Bestäm allmänna lösning till differentialekvationen $y'' + 5y = f(x)$,
där $f(x + 2\pi) = f(x)$ och $f(x) = x \quad , -\pi < x < \pi$.

8. Bestäm genom variabelseparation den lösning till den partiella differentialekvationen
$u'_x = u'_y + u$ som uppfyller villkoret $u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$.

9. Lös den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i området $0 < x < \pi,\ t > 0$
med randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ och
begynnelsevillkoren $u(x,0) = \sin 2x + 4\sin 4x$ och $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

10. Lös följande variant av värmeledningsproblemet:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad , \quad 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{2}(1 + 3\cos x) \quad , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

11. Lös begynnelsevärdesproblemet: $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , t > 0 \\ u(x,0) = \sin x + 10 \sin 3x \quad , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

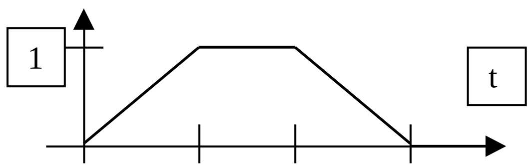
12. Låt $u(x,y)$ beteckna den stationära temperaturfördelningen i en tunn kvadratisk platta $0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y < 1$, ($u$ uppfyller alltså Laplaces´ ekvation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$) med randvillkoren $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 \quad , u(x,0) = 0$ och $u(x,1) = \cos 4\pi x$.

Bestäm temperaturen i mittpunkten $(x,y) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

13. En sträng är inspänd på x-axeln så att den har sina ändar i $x = 0$ och $x = 1$.
Vid tiden $t = 0$ befinner den sig i vila men utsätts för ett hammarslag som ger den en begynnelsehastighet av $g(x) = \begin{cases} h \ , \ \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4} \\ 0 \ , \text{ för övrigt} \end{cases}$.

Bestäm förflyttningen $u(x,t)$ då vågekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ satisfieras.

14. Bestäm Laplacetransformen för funktionen vars graf ritats här bredvid.
Grafen består av tre räta linjestycken för $0 \le t \le 3$.
För $t > 3$ är $f(t) = 0$.



15. Lös för $t \ge 0$ ekvationen $y'' + 6y' + 13y = e^{-3t} \sin 2t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

16. Lös integralekvationen $y(t) + 3\int_0^t \sin(t-u) y(u)\, du = t$.

17. Lös begynnelsevärdesproblemet
$y'' + 4y' + 4y = (8t - 4)U(t-1)$, $t > 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
Här är $U(t)$ Heavisides språngfunktion
("the unit step-function", $U(t) = 1$ för $t \ge 0$ och $U(t) = 0$ för $t < 0$).

18. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + y = \delta(t-1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
$\delta(t-1)$ är Diracs deltafunktion.

19. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 13y = 3\delta(t - \pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

20. Laplacetransformen ges av $L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ under lämpliga villkor.

Vilka av följande påståenden är korrekta? Bevis eller motexempel krävs.

a) $L\{t^2\} = \{L\{t\}\}^2$ b) $L\{2t\} = 2L\{t\}$

c) $L\{t + t^2\} = L\{t\} L\{t^2\}$ d) $L\{t + t^2\} = L\{t\} + L\{t^2\}$

e) f är styckvis kontinuerlig för $t \ge 0$ och av exponentiell ordning. $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$ där $F(s) = L\{f(t)\}$.

21. Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen $f(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\,d\tau$.

22. Beräkna $y(t)$ för $t > 0$ då $y'' + y = f(t)$ $\quad, y(0) = 7$, $y'(0) = 5$, där $f(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t < \pi \\ 4\sin t & , t \ge \pi \end{cases}$.

23. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 4y = 60\delta(t-3)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 5$ och $y'(0) = 10$.

LEDNINGAR:
1. Hur definieras ortogonalitet mellan funktioner ?
2. Se 1. Utnyttja trigonometriska funktioner. Hut ser respektive serie ut ?
3. För summorna användes lämpligt t-värde.
4. Vad konvergerar fourierserien mot ?
5. Utnyttja cosinusseriens egenskaper.
6. Här är en funktion utvecklad i en sinusserie.
7. Utveckla f i en fourierserie då en partikulärlösning skall bestämmas. Ansätt en partikulärlösning på samma form.
8. Använd superposition.

9-12. Använd variabelseparation och identifiering.

13. Använd variabelseparation och fourierserieutveckling.
14. Bestäm de räta linjernas ekvationer.

15-19. Laplacetransformera.

20. Utnyttja integralens egenskaper.

21-23. Laplacetransformera.

SVAR:

1. $\langle 1, \cos mt\rangle = 0$ $\langle 1, \sin nt\rangle = 0$ $\langle \cos mt, \sin nt\rangle = 0$ $\langle \cos mt, \cos nt\rangle = 0$

$\langle \sin mt, \sin nt\rangle = 0$ $\quad t \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$

2. a) $\langle \sin nx, \sin mx\rangle = 0$ b) $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ c) Fourierserien: $\frac{0^2+1+3^2+1}{2} = \frac{11}{2}$,

cosinusserien: $\frac{0^2+1+0^2+1}{2} = 1$, sinusserien: $\frac{0^2+1-(0^2+1)}{2} = 0$.

3. $f(t) \sim \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nt$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

4. $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2\frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2} \cos n\pi x + 2\frac{-\cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi x \right\}$

Fourierseriens summa för $x = 1$ blir medelvärdet $\frac{f(1+) + f(1-)}{2} = \frac{0+2\ 1}{2} = 1$.

5. $s(-8/3) = -\frac{\pi^2}{18}$

6. $b_n = 0$ $\quad, n$ jämnt och $b_n = \frac{4n}{\pi(n^2-4)}$, n udda

7. $y = y_h + y_p = A\cos\sqrt{5}x + B\sin\sqrt{5}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n(n^2-5)} \sin nx$

8. $u(x,0) = 3e^{-5x-6y} + 2e^{-3x-4y}$

9. $u(x,t) = \cos 4t \sin 2x + 4\cos 8t \sin 4x$

10. $u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-t}\cos x$

11. $u(x,t) = \sin x \; e^{-t} + 10\sin 3x \; e^{-9t}$

12. $u(x,y) = \frac{e^{4\pi y} - e^{4\pi y}}{e^{4\pi} - e^{4\pi}} \cos 4\pi x \quad u(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}$

13. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{(n\pi)^2} (\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}) \sin n\pi x \sin n\pi t$

14. $F(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s})$

15. $y(t) = \frac{1}{8}e^{-3t}(\sin 2t - 2t\cos 2t)$

16. $y(t) = \frac{1}{4}t + \frac{3}{8}\sin 2t$

17 . $y(t) = e^{-2t} + U(t-1)(2(t-1) - 1 + e^{-2(t-1)})$

18. $y(t) = \cos t + U(t-1)\sin(t-1)$

19. $y(t) = e^{-2t}(-e^{2\pi}\sin 3t \; U(t-\pi) + \cos 3t + \frac{2}{3}\sin 3t)$

20. a) och c) är falska, b), d) och e) är sanna.

21. $f(t) = \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$

22. $y(t) = 7\cos t + 5\sin t - \frac{1}{2}\{\sin(t-\pi) - (t-\pi)\cos(t-\pi)\}U(t-\pi)$

23. $y(t) = 5e^{2t} + 15U(t-3)(e^{2(t-3)} - e^{-2(t-3)})$