SF1633 Differentialekvationer I.
MODULUPPGIFTER 2.
Högre ordningens linjära differentialekvationer.
System av första ordningens linjära differentialekvationer.
Plana autonoma system.

1. För vilka värden på den reella konstanten a har problemet $y'' + 2y' + ay = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$ icke-triviala lösningar, dvs andra lösningar än $y = 0$?

2. Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

 a) Visa att Wronskianen , $W(y_1, y_2)$, till y_1 och y_2 satisfierar $a_2(x)\dfrac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$.

 b) Härled därefter Abels formel $W = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$, där C är en konstant.

 c) Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \ -1 < x < 1$.
 Bestäm $W(y_1, y_2)$.

3. Betrakta differentialekvationen $t^4y'' + 7t^3y' + 5t^2y = 1, \ t > 0$.
 Samtliga lösningar till denna ekvation, liksom till den motsvarande homogena (med HL =0), kan uttryckas med hjälp av lämpliga summor av funktioner av typ t^p där p är reellt.
 Bestäm allmänna lösningen till den givna ekvationen.

4. $y = 3e^x, \ y = e^x, \ y = 5e^{-x}$ och $y = 2e^{-x}$ är lösningar till differentialekvationen $y'' - y = 0$.
 Ange en bas för lösningsrummet. Väl underbyggd motivering skall ges.

5. Visa att x^{-1} och x^3 utgör en fundamentalmängd av lösningar till $y'' - x^{-1}y' - 3x^{-2}y = 0$, $x > 0$.
 Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' - x^{-1}y' - 3x^{-2}y = 2x$, $x > 0$.

6. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$.

7. Visa att $\{1, \ e^t, \ e^{-2t}\}$ <u>kan</u> bilda en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter. Bestäm också en sådan differentialekvation.

8. Funktionerna $y_1(x) = x, \ y_2(x) = x\ln x, \ y_3(x) = 5x, \ y_4(x) = x^2$ och $y_5(x) = x + x^2$
 är lösningar till en linjär tredje ordningens homogen differentialekvation.
 Bestäm en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen.
 Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$ och $y''(1) = 1$.

9. Skriv om differentialekvationen $y'' + 2y' + 2y = 0$ som ett linjärt system av första ordningen.
 Bestäm en fundamentalmatris till systemet. Ange även systemets allmänna lösning.

10. Bestäm en fundamentalmatris till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 2y \\ 11x - 2y \end{pmatrix}$.

 Ange hastighetsvektorn i punkten (2,11).

11. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

12. Positionen för en partikel ges av systemet $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$.

För 2x2-matrisen $\mathbf{A}$ gäller följande ekvationer: $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer.
Avgör även partikelns öde om den vid tiden $t = 2$ befinner sig i punkten (2,2).

13. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 3y + 4 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y - 1 \end{cases}$.

14. En partikels läge bestäms av systemet $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix}1 & -1\\5 & -3\end{pmatrix}\mathbf{X}$. Bestäm partikelns läge vid en godtycklig tidpunkt t

då $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat?

15. Origo är en kritisk punkt till systemet $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu x + y\\-x + y\end{pmatrix}$, där μ är en reell konstant med $\mu \neq 3, \mu \neq -1$.

Klassificera för alla μ den kritiska punkten med avseende på typ(nod, sadel osv) och stabilitet/instabilitet.

16. Bestäm de kritiska punkterna till det autonoma systemet $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 1 - x^2 \end{cases}$.

Avgör även stabilitet och typ hos dessa. Bestäm en tangentvektor till lösningskurvan i punkten $(2,3)$

17. Klassificera med avseende på stabilitet den kritiska punkten $(0,0)$ till ett plant autonomt system svarande mot den icke-linjära andra ordningens differentialekvation $x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$ för alla reella värden på μ.

18. Givet systemet $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x + \alpha y + xy\\ \dfrac{x}{x-1}\end{pmatrix}$, där α är en konstant.

För vilka värden på α utgörs trajektorierna i en omgivning till origo av spiraler? Är origo en stabil punkt?
Skruvar sig spiralerna med- eller moturs då $t \to \infty$?

19. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Origo är den enda stationära punkten. Avgör dess karaktär, dvs stabilitet / instabilitet samt typ.

LEDNINGAR:

1. Bestäm först lösningarna i de tre fallen; $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ och $\alpha < 1$.
2. Bestäm Wronskianen $W(y_1, y_2)$ och sätt in i vänstra ledet i $a_2(x)\dfrac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$ och utnyttja att y_1 och y_2 är lösningar till $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.
3. Ansätt lösningar på formen $y = t^p$.
4. Vad karakteriserar en bas ?
5. Visa att x^{-1} och x^3 är linjärt oberoende lösningar. Hur många sådana behövs ?
   För partikulärlösningen användes variation av parametrar.

6. Bestäm allmänna homogena lösningen och använd därefter variation av parametrar.
   En annan variant är att bestämma en lösning och därefter använda reduktion av ordning.
7. Visa att funktionerna är linjärt oberoende. Hur ser karakteristiska ekvationen ut ?
8. Det behövs tre linjärt oberoende lösningar. Välj de enklaste.
   Ange allmänna lösningen och bestäm därefter konstanterna.
9. Sätt $x = y'$. Bestäm matrisens egenvärden och tillhörande egenvektorer.
10. Bestäm matrisens egenvärden och tillhörande egenvektorer.
11. Bestäm matrisens egenvärden och tillhörande egenvektorer.
12. Vad är λ och $\mathbf{v}$ i ekvationen $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$?
13. Bestäm den allmänna homogen lösningen och därefter en partikulärlösning. Addera dessa.
14. Bestäm allmänna lösningen.
15. Bestäm egenvärdena och studera dessa.
16. Bestäm egenvärdena och studera dessa. Tolka det givna systemet geometriskt.
17. Omforma differentialekvationen mha $y = x',\ y' = x''$. Bestäm egenvärdena och studera dessa.
18. Bestäm egenvärdena och studera dessa.
19. Bestäm egenvärdena och studera dessa.

SVAR**:**

1. $a = 1 + n^2$
2. c) $W = \dfrac{C}{1-x^2}\ ,\ -1 < x < 1$
3. $y = y_h + y_p = C_1 t^{-1} + C_2 t^{-5} - \dfrac{1}{3} t^{-2}$
4. $\{e^x, e^{-x}\}$ är en bas för lösningsrummet till differentialekvationen $y'' - y = 0$.
5. $y_p = -\dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^3}{2}\ln x$
6. $y = Ae^x + Ce^{2x} + (e^{2x} + e^x)\ln(1 + e^x)$
7. $y''' + y'' - 2y' = 0$
8. $\{x,\ x\ln x,\ x^2\}$, $y = x - 3x\ln x + 2x^2$.
9. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ e^{-t}(-\cos t) & e^{-t}(-\sin t) \end{pmatrix}$

   $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ e^{-t}(-\cos t) & e^{-t}(-\sin t) \end{pmatrix}\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.
10. $\Phi = \begin{pmatrix} e^{9t} & 2e^{-4t} \\ e^{9t} & -11e^{-4t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 36 \\ 0 \end{pmatrix}$.
11. $\mathbf{X} = e^{5t}\begin{pmatrix} -2\cos 2t - 5\sin 2t \\ 8\cos 2t - 9\sin 2t \end{pmatrix}$
12. Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t}$. Partikeln avlägsnar sig obegränsat från punkten.
13. $\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}C_1 + \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}C_2 + \begin{pmatrix} -11t - 15 \\ -11t - 10 \end{pmatrix}$
14. $\mathbf{X} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + 3\sin t \end{pmatrix}$ Partikeln går mot origo längs en spiral, då t växer obegränsat.
15. $\begin{cases} \mu > 3 & \text{Instabil nod.} \\ -1 < \mu < 3 & \text{Instabil spiral.} \\ \mu < -1 & \text{Sadelpunkt, instabil} \end{cases}$

16. $(1,\ 1)$ är en sadelpunkt och är instabil. $(-1,\ -1)$ är en instabil spiralpunkt. En tangentvektor är $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

17. $\mu \le -2$ asymptotiskt stabil. $\mu \ge 2$ instabil.

För $\mu^2 < 4$ erhålles komplexa egenvärden. $\mu = \operatorname{Re}\lambda < 0$ asymptotiskt stabil. $\mu = \operatorname{Re}\lambda > 0$ instabil.
För $\mu = \operatorname{Re}\lambda = 0$ kan ingen slutsats dras från det linjariserade systemet.
För $\mu = \operatorname{Re}\lambda = 0$ blir det icke-linjära systemet linjärt. Stabilt.

18. $\alpha > \frac{1}{4}$. Origo är en stabil punkt. Medurs.

19. Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Origo är en sadelpunkt och således instabil.