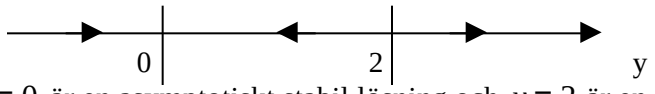
KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Lösningsförslag till kontrollskrivning nr 1, måndagen den 16 september 2013, kl 08.15-09.45.
Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

1. Undersök $\lim_{t\to\infty} y(t)$ för alla startvärden $y(0) = y_0$ då $\frac{dy}{dt} = y(y-2)$

……

Lösningsförslag:
Vi bestämmer först de kritiska punkterna, konstantlösningarna.
Dessa erhålles då derivatan är lika med noll.
$\frac{dy}{dt} = y(y-2) = 0$ ger konstantlösningarna y=0 och y=2.
Studera derivatans tecken och rita upp funktionens uppförande i faslinjen.



$y = 0$ är en asymptotiskt stabil lösning och $y = 2$ är en instabil lösning.
$\lim_{t\to\infty} y(t)$ är ändligt för $\{y_0 : y_0 \le 2\}$ och obegränsat för $\{y_0 : y_0 > 2\}$.
För $\{y_0 : y_0 < 2\}$ är $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ och för $\{y_0 : y_0 = 2\}$ är $\lim_{t\to\infty} y(t) = 2$.
SVAR: Konstantlösningarna y=0 och y=2.
$y = 0$ är en asymptotiskt stabil lösning och $y = 2$ är en instabil lösning.
För $\{y_0 : y_0 < 2\}$ är $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ och för $\{y_0 : y_0 = 2\}$ är $\lim_{t\to\infty} y(t) = 2$.
$\lim_{t\to\infty} y(t)$ är obegränsat för $\{y_0 : y_0 > 2\}$.

2. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $y' + 2y = y^2$, $y(0) = 1$.
Bestäm även $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

……

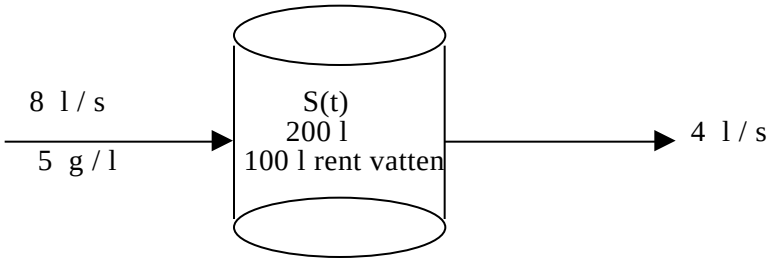
Lösningsförslag:
Vi har en separabel differentialekvation, men den är även Bernoullsk.
Vi löser den som Bernoullsk. y=0 är ingen lösning till begynnelsevärdesproblemet.
Omforma differentialekvationen $y^{-2}y' + 2y^{-1} = 1$.
Sätt $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$.
Insättning i differentialekvationen ger $-z' + 2z = 1$ eller $z' - 2z = -1$.
Vi har erhållit en linjär differentialekvation av ordning ett med konstanta koefficienter.
Den allmänna lösningen är summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
Vi får $z = Ae^{2t} + \frac{1}{2}$ vilket ger $y = \frac{2}{2Ae^{2t}+1}$.
Villkoret $y(0) = 1$ ger $1 = \frac{2}{2A+1}$, $2A = 1$ dvs $y = \frac{2}{e^{2t}+1}$.
Nu över till gränsvärdet. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$
SVAR: Begynnelsevärdesproblemets lösning är $y = \frac{2}{e^{2t}+1}$ och $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

3. Bestäm sockerkoncentrationen i den fyllda tanken då vätska med 5 gram per liter pumpas in med hastigheten 8 liter per sekund.
Tanken rymmer 200 liter och innehåller från början 100 liter rent vatten.
Den välblandade sockerlösningen pumpas ut med hastigheten 4 liter per sekund.

……

Lösningsförslag:

Låt $S(t)$ vara sockermängden i tanken vid tiden t.



Inflödet av socker per tidsenhet är $S_{\text{in}} = 8\ \ l/s\ \ \ 5\ \ g/l = 40\ \ g/s$.

Utflödet av socker per tidsenhet är $S_{\text{ut}} = 4\ \ l/s\ \ \dfrac{S(t)}{100 + t(8-4)}\ \ g/l = \dfrac{S(t)}{25+t}\ \ g/s$.

Förändring av sockermängden per tidsenhet är $\dfrac{dS(t)}{dt}$.

Vi erhåller differentialekvationen $\dfrac{dS(t)}{dt} = 40 - \dfrac{S(t)}{25+t}$,

Vi har en linjär differentialekvation av första ordningen, vilken kan lösas med integrerande faktor.

Omforma ekvationen $(25+t)\dfrac{dS(t)}{dt} + S(t) = 40(25+t)$, $\dfrac{d}{dt}\{S(t)(25+t)\} = 40(25+t)$.

Integrera med avseende på t: $S(t)(25+t) = 20(25+t)^2 + C$.

Vi bestämmer integrationskonstanten. Vid tiden t innehåller tanken endast rent vatten.

Villkoret är $\begin{cases} t = 0 \\ S = 0 \end{cases}$ vilket ger $0 = 20\ \ 25^2 + C,\ \ C = -12500$.

Sockermängden vid tiden t är $S(t) = 20(25+t) - \dfrac{12500}{25+t}$.

Tanken är fylld då $200 = 100 + t\ \ (8-4)$, $t = 25$.

Sockermängden vid $t = 25$ är $S(25) = 20\ \ 50 - \dfrac{12500}{50} = 1000 - 250 = 750$ gram.

Koncentrationen i tanken vid tiden $t = 25$ är $\dfrac{S(25)}{V(25)} = \dfrac{750}{200} = 3{,}75$ gram per liter.

SVAR: Sockerkoncentrationen i den fyllda tanken är $3{,}75$ gram per liter.