KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 2, måndagen den 30 september 2013, kl 08.15-09.45.
Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

1. Låt $y_1(x) = x^2 + 3x^3$, $y_2(x) = 2x^2 - x^3$, $y_3(x) = x^2$ och $y_4(x) = x^2 + x^3$ vara lösningar till en linjär differentialekvation på formen $x^2y'' + axy' + by = 0$, $x > 0$.
Låt vidare $y_p(x) = x^2 \ln x$ vara en partikulärlösning till differentialekvationen
$x^2y'' + axy' + by = f(x)$, $x > 0$.
Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = f(x)$, $x > 0$.
som uppfyller villkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 3$.
……..……

<u>Lösningsförslag:</u>
Vi behöver först den allmänna lösningen till $x^2y'' + axy' + by = f(x)$, $x > 0$.
Den allmänna lösningen är summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning. Den allmänna homogena lösningen till en linjär differentialekvation av ordning två är en linjärkombination av två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen. Vi väljer $y_h(x) = C_1x^2 + C_2x^3$.
Den allmänna lösningen till $x^2y'' + axy' + by = f(x)$, $x > 0$ är
$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1x^2 + C_2x^3 + x^2 \ln x$.
Nu över till att bestämma konstanterna.
Vi behöver derivatan.

$$y'(x) = C_1 2x + C_2 3x^2 + 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = C_1 2x + C_2 3x^2 + 2x\ln x + x \ .$$

Villkoren ger $\begin{cases} 0 = y(1) = C_1 + C_2 + 0 \\ 3 = y'(1) = 2C_1 + 3C_2 + 0 + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 2 \end{cases}$.

Den sökta lösningen är $y(x) = -2x^2 + 2x^3 + x^2 \ln x$.

SVAR: Den lösning till differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = f(x)$, $x > 0$.
som uppfyller villkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 3$ är $y(x) = -2x^2 + 2x^3 + x^2 \ln x$.

2 Bestäm en fundamentalmatris , Φ, till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Bestäm vidare den konstanta matrisen $\mathbf{B} = \Phi'\Phi^{-1}$.
Φ' är fundamentalmatrisens derivata och Φ^{-1} är inversen till fundamentalmatrisen.
……..……

<u>Lösningsförslag</u>:
En fundamentalmatris består av linjärt oberoende lösningar till systemet.
I vårt fall behövs två linjärt oberoende lösningar.
Bestäm först matrisens egenvärden.

De erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vi får $0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Egenvärden är $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.
Bestäm tillhörande egenvektor.
Insättning av egenvärdena i ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$.
$\underline{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 5-2 & -6 \\ 1 & 0-2 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{X}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{K}_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -6 \\ 1 & 0-3 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{X}_2 = e^{\lambda_2 t}\mathbf{K}_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$.

Nu över till den konstanta matrisen $\mathbf{B} = \Phi'\Phi^{-1}$.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 4e^{2t} & 9e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} \text{ och } \Phi^{-1} = \frac{1}{-e^{5t}}\begin{pmatrix} e^{3t} & -3e^{3t} \\ -e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & 3e^{-2t} \\ e^{-3t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B} = \Phi'\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^{2t} & 9e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-2t} & 3e^{-2t} \\ e^{-3t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har erhållit systemets matris $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$!

SVAR En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$.

Den konstanta matrisen $\mathbf{B} = \Phi'\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Bestäm de kritiska punkterna till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 - y^2 - 4 \\ x - y \end{pmatrix}$.

Klassificera de kritiska punkterna med avseende på stabilitet/instabilitet .

……

Lösningsförslag

Bestäm först de kritiska punkterna (de stationära lösningarna).
För de kritiska punkterna är hastighetsvektorn lika med nollvektorn.

Hastighetsvektorn $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 - y^2 - 4 \\ x - y \end{pmatrix}$.

Vi erhåller följande icke-linjära ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 - y^2 - 4 \\ x - y \end{pmatrix},\ \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = y \end{cases}.$$

De kritiska punkterna är: $(x = 2,\ y = 2)$ och $(x = -2, y = -2)$.
För att klassificera de kritiska punkterna studeras dessa lokalt. Vi kan då antingen införa ett nytt koordinatssystem med origo i den kritiska punkten och ta med den linjära delen av systemet eller direkt bestämma Jacobimatrisen i den kritiska punkten. Vi väljer det senare.

Hastighetsvektorn $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 - y^2 - 4 \\ x - y \end{pmatrix}$ ger oss Jacobimatrisen $g'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 4x & -2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Insättning av respektive punkt ger oss en matris, vars egenvärden avgör typ och stabilitet.
Egenvärdena λ till en matris $\mathbf{A}$ erhålles ur ekvationen $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Punkten $(2,2)$ ger $\mathbf{g}'(2,2) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ och vi får $0 = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 4 = (\lambda - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} - 4$.

Egenvärdena är $\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{65}}{2}$.

Reella egenvärden med olika tecken innebär instabilitet.
Detta gäller även för det icke-linjära systemet.

Punkten $(-2,-2)$ ger $\mathbf{g}'(-2,-2) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ och vi får

$0 = \begin{vmatrix} -8-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda + 4 = (\lambda + \frac{9}{2})^2 - \frac{81}{4} + 4$. Egenvärdena är $\lambda = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{2}$.

Negativa reella egenvärden. Detta innebär stabilitet.

Detta gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: $(2,2)$ är instabil. och $(-2,-2)$ är stabil.