Allmän teori, linjära system

Hans Ringström
KTH, Avdelningen för matematik

F2, Stockholm, 2 april 2014

Lösningsbegreppet

Betrakta ekvationen

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t). \tag{1}$$

Definition

En **lösning** på ett intervall I är en funktion

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

vars element är differentierbara och uppfyller systemet (1) på I.

Begynnelsevärdesproblem

Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t), \tag{2}$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0. \tag{3}$$

Sats (Existens och entydighet)

Om elementen i $A(t)$ och $\mathbf{F}(t)$ är kontinuerliga funktioner på ett intervall I som innehåller t_0, så finns det en unik lösning till (2)–(3) på I.

Superpositionsprincipen

Sats

Om $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k$ är en mängd lösningar till det linjära homogena systemet

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \tag{4}$$

på ett intervall I, så är även

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + \ldots c_k\mathbf{X}_k,$$

där $c_1, \ldots, c_k$ är konstanter, en lösning till (4) på I.

Antaganden

Från och med nu förutsätts elementen i $A(t)$ och $\mathbf{F}(t)$ vara kontinuerliga funktioner på ett gemensamt intervall I.

Vidare antas $A(t)$ vara en $n \times n$-matris för varje t i I.

Linjärt beroende/oberoende

Definition

Låt $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k$ vara lösningar till det linjära homogena systemet $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$ på I. Då sägs mängden vara **linjärt beroende** på intervallet om det finns konstanter $c_1, \ldots, c_k$, inte alla noll, sådana att

$$c_1\mathbf{X}_1(t) + \cdots + c_k\mathbf{X}_k(t) = 0$$

för alla t i intervallet. Om mängden inte är linjärt beroende på intervallet så sägs den vara **linjärt oberoende**.

Wronskianen

Sats

Låt

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

vara n lösningar till det linjära homogena systemet $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$ på I. Då är lösningarna linjärt oberoende på I om och endast om **Wronskianen**

$$W(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

för varje t i I.

Fundamentalmängd

Definition

Låt $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ vara n stycken linjärt oberoende lösningar till det linjära homogena systemet

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} \tag{5}$$

på I. Då sägs $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ vara en **fundamentalmängd av lösningar** på intervallet I.

Sats

Det finns en fundamentalmängd av lösningar till det linjära homogena systemet (5) på I.

Allmän lösning, homogena fallet

Sats

Låt $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ *vara en fundamentalmängd av lösningar till det linjära homogena systemet* $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$ *på* I*. Då ges den* **allmänna lösningen** *till det linjära homogena systemet av*

$$c_1\mathbf{X}_1 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n,$$

där $c_1, \dots, c_n$ *är godtyckliga konstanter.*

Allmän lösning, inhomogena fallet

Sats

Låt $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ *vara en fundamentalmängd av lösningar till det linjära homogena systemet* $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$ *på* I. *Låt* $\mathbf{X}_p$ *vara en partikulärlösning till det linjära inhomogena systemet* $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$ *på* I. *Då ges den* **allmänna lösningen** *till det linjära inhomogena systemet av*

$$c_1\mathbf{X}_1 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n + \mathbf{X}_p,$$

där $c_1, \ldots, c_n$ *är godtyckliga konstanter.*