

1. I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten, som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstegradspolynom, nämligen en konstant, a , minus antalet djur gånger en annan konstant, b . Konstanterna är positiva.

Då erhålles $\frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} = a - bP(t)$.

Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h , avlägsnas.

Den justerade matematiska modellen blir $\frac{dP(t)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.

Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.

Studera långtidsbeteendet för olika startvärden på populationen.

Lösningförslag:

Sätt in de givna konstanterna i differentialekvationen.

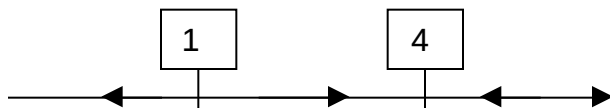
Då erhålles $\frac{dP}{dt} = (5 - P)P - 4 = -P^2 + 5P - 4 = (P - 1)(4 - P)$.

Vi bestämmer först kritiska punkter och studerar därefter derivatans tecken.

I de kritiska punkterna är derivatan lika med noll.

Vi erhåller två kritiska punkter $P = 1$, $P = 4$.

Nu över till studie av derivatans tecken.



Vi får följande population efter lång tid med startpopulationen P_0 :

○ $P_0 > 1$: $P(t) \rightarrow 4$, $t \rightarrow \infty$.

○ $P_0 = 1$: $P(t) \rightarrow 1$, $t \rightarrow \infty$.

○ $P_0 < 1$: $P(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

○ $P_0 > 1$: $P(t) \rightarrow 4$, $t \rightarrow \infty$.

SVAR: ○ $P_0 = 1$: $P(t) \rightarrow 1$, $t \rightarrow \infty$.

○ $P_0 < 1$: $P(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

2. I en tank med 200 liter vatten finns även 1500 gram salt.

En saltlösning med 5 gram salt per liter pumpas in med 2 liter per minut.

Den väl blandade lösningen pumpas ut med samma hastighet.

Bestäm saltmängden i tanken som funktion av tiden t .

Bestäm även saltmängden i tanken efter lång tid.

Lösning:

Låt saltmängden i tanken vid tiden t vara $A(t)$.

Saltmängden uppfyller differentialekvationen $\frac{dA}{dt} = 5 \cdot 2 - \frac{A}{200} \cdot 2$, $\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100} = 10$.

Vi har en linjär differentialekvation av första ordningen.

Vi bestämmer allmänna homogena lösningen plus en partikulär lösning.

Saltmängden vid en godtycklig tidpunkt t är $A(t) = Ce^{-\frac{t}{100}} + 1000$.

Begynnelsevillkoret $A(0) = 1500$ ger integrationskonstanten.

Vi får $1500 = A(0) = C + 1000$, $C = 500$.

$$A(t) = 500e^{-\frac{t}{100}} + 1000$$

Efter lång tid blir saltmängden 1000 gram, vilket även inses genom att en saltlösning med koncentrationen 5 gram salt per liter pumpas in tanken med 200 liter vatten.

SVAR: Saltmängden vid en godtycklig tidpunkt t är $A(t) = 500e^{-\frac{t}{100}} + 1000$.

Efter lång tid är saltmängden 1000 gram.

3. Lös samt ange existensintervallet till begynnelsevärdesproblemet

$$xy' - y^2 = y, \quad y(1) = 3.$$

Lösningssförslag:

Differentialekvationen är separabel. (Även av Bernoulli typ.)

Vi omformar: $xy' = y^2 + y$.

De två konstantlösningarna $y = 0$ och $y = -1$ uppfyller ej villkoret.

Då $y \neq 0$ och $y \neq -1$ kan differentialekvationen skrivas: $\frac{1}{y^2 + y} y' = \frac{1}{x}$.

Vi partialbråksuppdelar och får då följande uttryck: $\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} y' = \frac{1}{x}$.

Integration med x : $\ln|y| - \ln|y+1| = \ln|x| + \ln|C_1|$, $\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln|C_1 x|$, $\frac{y}{y+1} = \pm C_1 x = Cx$.

Bestäm integrationskonstanten. Villkoret $y(1) = 3$ ger $C = \frac{3}{4}$.

Sätt in konstanten i ekvationen och lös ut den sökta lösningen.

Vi får: $4y = 3x(y+1)$, $y = \frac{3x}{4-3x}$ där $4-3x \neq 0$.

Villkoret $4-3x \neq 0$ ger att det finns två möjliga intervall: $\mathbb{R}^+ : x < \frac{4}{3}$ eller $\mathbb{R}^+ : x > \frac{4}{3}$.

Begynnelsevillkoret, $y(1) = 3$, ger att det aktuella intervallet är $\mathbb{R}^+ : x < \frac{4}{3}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \frac{3x}{4-3x}$ och dess existensintervall är $\mathbb{R}^+ : x < \frac{4}{3}$.