

1. En lösning till differentialekvationen $ty' - (1+t)y + y = 0$, $t > 0$ ges av $y = e^t$.

Bestäm differentialekvationens allmänna lösning.

Lösningsförslag:

Vi bestämmer först en av den givna lösningen linjärt oberoende lösning.

Vi använder reduktion av ordning. Detta innebär att vi sätter $y = e^t z$.

Insättning i differentialekvationen ger: $t\{e^t z' + 2e^t z + e^t z\} - (1+t)\{e^t z + e^t z\} + e^t z = 0$.

Förenkla: $t\{z' + 2z + z\} - (1+t)\{z + z\} + z = 0$, $tz' + (t-1)z = 0$.

Sätt: $u = z$, $u' = z'$. Vi får då $tu' + (t-1)u = 0$, vilken är separabel.

Omformning ger: $\frac{u'}{u} = \frac{1-t}{t} = \frac{1}{t} - 1$. Vi söker en lösning.

Integration med t : $\ln|u| = \ln t - t$, $u = \pm te^{-t}$. En lösning sökes, tag $u = te^{-t}$, $z = te^{-t}$.

Partiell integration ger: $z = -te^{-t} - e^{-t}$. Vi får då $y = e^t(-te^{-t} - e^{-t}) = -t - 1$.

Även $y = t+1$ är en lösning. Vi undersöker det linjära oberoendet och använder då

Wronskian, vilken skall vara skild ifrån noll. $W(e^t, t+1) = \begin{vmatrix} e^t & t+1 \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = -te^t < 0$ då $t > 0$.

De två funktionerna, $y = e^t$ och $y = t+1$, är linjärt oberoende och bildar en bas för Lösningsskummet till den givna differentialekvationen.

Den allmänna lösningen erhålles som en godtycklig linjärkombination av basfunktionerna.

Vi får således $y = c_1 e^t + c_2(t+1)$, där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.

SVAR: Den allmänna lösningen ges av $y = c_1 e^t + c_2(t+1)$.

2 Lös systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Avgör vad som händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten (5,6).

Lösningsförslag:

Vi börjar med att bestämma egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2 + 4$$

Egenvärdena är komplexa och lika med $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$.

Det räcker att bestämma egenvektorn till ett av egenvärdena. Vi väljer $\lambda_1 = 1 + 2i$.

Insättning i systemet $(A - \lambda_1 I)K = 0$ ger:

$$\begin{pmatrix} 3-1-2i & -2 \\ 4 & -1-1-2i \end{pmatrix} K = 0, \quad \begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} K = 0, \quad K_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Vi har nu en komplex lösning till systemet. $Z = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ i(\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$.

Genom att ta realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen erhåller vi två reella linjärt oberoende lösningar till systemet.

$$\mathbf{X}_1 = e^t \begin{pmatrix} \hat{A} \cos 2t \\ \hat{E} \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{X}_2 = e^t \begin{pmatrix} \hat{A} \sin 2t \\ \hat{E} \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} \hat{A} e^t \cos 2t \\ \hat{E} e^t (\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \hat{A} e^t \sin 2t \\ \hat{E} e^t (\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix}$.

En partikel som placeras i punkten (5,6) kommer att avlägsna sig obegränsat från origo.

SVAR: Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \hat{A} e^t \cos 2t \\ \hat{E} e^t (\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \hat{A} e^t \sin 2t \\ \hat{E} e^t (\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix}$.

Partikeln avlägsnar sig obegränsat från origo.

3. Bestäm de kritiska punkterna till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \hat{A} x \\ \hat{E} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} x + \frac{\hat{E} 1}{\hat{E} 2} - 3y^2 - y - x^2 \end{pmatrix}$.

Klassificera de kritiska punkterna med avseende på stabilitet/instabilitet samt typ.

Lösningsförslag:

I de kritiska punkterna är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Vi får då $\begin{pmatrix} \hat{A} x \\ \hat{E} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} 0 \\ \hat{E} 0 \end{pmatrix}$. Vi erhåller följande kritiska punkter (0, 0) och (-1, 0).

Vi studerar nu det linjariserade systemet.

Först beräknas Jacobimatrisen och sätter därefter in respektive stationära(kritiska) punkt.

Jacobimatrisen blir $\begin{pmatrix} \hat{A} 0 & 1 \\ \hat{E} 1 - 2x & \frac{1}{2} - 9y^2 \end{pmatrix}$.

Den kritiska punkten (0, 0) ger följande matris $\begin{pmatrix} \hat{A} 0 & 1 \\ \hat{E} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur $0 = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$, $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

Komplexa egenvärden med positiv realdel innebär att den kritiska punkten är en instabil spiralpunkt.

Det samma gäller även för det icke-linjära systemet.

Den kritiska punkten (-1, 0) ger följande matris $\begin{pmatrix} \hat{A} 0 & 1 \\ \hat{E} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur $0 = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{16}$, $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Reella egenvärden med olika tecken innebär att den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

Det samma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: (0,0) är en instabil spiralpunkt. (-1,0) är en sadelpunkt och därmed instabil.