Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.

Tisdagen den 27 maj 2014, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1

Modul 1.

Ett fallande föremål med massan m påverkas av tyngdkraften mg och av ett luftmotstånd.
Den retarderande kraften är proportionell mot hastigheten v.
Enligt Newtons andra lag är massan gånger accelerationen lika med de krafter som påverkar föremålet. Bestäm föremålets hastighet efter lång tid.

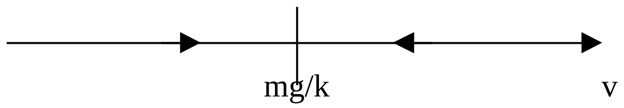
Lösning:

Vi ställer upp differentialekvationen $\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$.

Vi bestämmer först den stationära lösningen.

Den erhålles då derivatan är lika med noll. Vi får $v = \dfrac{mg}{k}$.

Studera derivatans tecken och rita upp funktionens uppförande i faslinjen.



Efter lång tid blir hastigheten lika med $\dfrac{mg}{k}$.

SVAR: Föremålets hastighet efter lång tid är $\dfrac{mg}{k}$.

Modul 2.

$y_1(x) = x$ är en lösning till differentialekvationen $x^2y'' - xy' + y = 0 \quad , x > 0$.
Bestäm en fundamentalmängd av lösningar samt ange den allmänna lösningen.

Lösning:

Vi ansätter $y = xz(x),\ y' = xz'(x) + z(x)\ ,\ y'' = xz''(x) + 2z'(x)$.

Insättning i differentialekvationen ger $x^2(xz''(x) + 2z'(x)) - x(xz'(x) + z(x)) + xz(x) = 0$.

$xz''(x) + z'(x) = 0$

Sätt $u(x) = z'(x) \quad , u'(x) = z''(x)$. $xu'(x) + u(x) = 0$, $\dfrac{d}{dx}(xu(x)) = 0$.

Integrera med avseende på x: $xu(x) = C_1$ och vi får $z'(x) = \dfrac{C_1}{x}$.

Integrera med avseende på x: $z(x) = C_1 \ln x + C_2$.

$y = xz(x)$ ger $y = x(C_1 \ln x + C_2) = C_1 x \ln x + C_2 x$.

En fundamentalmängd av lösningar består av linjärt oberoende lösningar.
Antalet är lika med differentialekvationens ordning. I vårt fall två.
En fundamentalmängd är $\{\ x \ln x\ ,\ x\ \}$.
Den allmänna lösningen är en linjärkombination av de linjärt oberoende lösningarna.
Vi får $y = C_1 x \ln x + C_2 x$.
SVAR: En fundamentalmängd är $\{\ x \ln x\ ,\ x\ \}$. Den allmänna lösningen $y = C_1 x \ln x + C_2 x$.

Modul 3.

Låt $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2}$ vara en given laplacetransform. Bestäm orginalfunktionen $f(t)$ då $L\{f(t)\} = F(s)$.

Bestäm även $f(3)$

Lösning:
Vi återtransformerar och får $f(t) = (t-2)U(t-2)$, där $U(t-2)$ Heavisides stegfunktion.
$f(3) = (3-2)U(3-2) = 1U(1) = 1$
SVAR: Orginalfunktionen $f(t) = (t-2)U(t-2)$ och $f(3) = 1$.

Del 2
11. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen
$y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 4$ [år] och $b = 80$ [ton].
Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).
a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.
b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.
c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.

Lösning:
a. Den korrigerade differentialekvationen blir $y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right) - c$.
Med de givna värdena på konstanterna får vi
$$y' = \frac{y}{4}\left(1 - \frac{y}{80}\right) - c = \frac{y(80-y)}{320} - c = \frac{y(80-y) - 320c}{320} = f(y) .$$
b. Jämviktslösning erhålles då $f(y) = 0$.
Då är $y^2 - 80y + 320c = 0$, $(y-40)^2 = 1600 - 320c = 320(5-c)$.
Reella lösningar och större än noll erhålles då $c \le 5$.
För $c > 5$ existerar inga jämviktslösningar.
Jämviktslösningarna är $y = 40 \pm \sqrt{320(5-c)}$.
c. Vi bestämmer den stabila jämviktslösningen y_0 genom att studera tecknet hos $f'(y_0)$.
Jämviktslösningen är stabil om $f'(y_0) < 0$ och instabil om $f'(y_0) > 0$.
$f'(y) = \frac{80-2y}{320} = \frac{40-y}{160}$ och insättning av jämviktslösningarna ger
$f'(40 + \sqrt{320(5-c)}) = \frac{-\sqrt{320(40-c)}}{160} < 0$ stabil jämviktslösning.
$f'(40 - \sqrt{320(5-c)}) = \frac{\sqrt{320(40-c)}}{160} > 0$ instabil jämviktslösning.
SVAR:
a. Den nya differentialekvationen är $y' = \frac{y(80-y)}{320} - c$.
b. Det kritiska värde på c är $c = 5$.
c. Jämviktsnivån $y_0 = 40 + \sqrt{320(5-c)}$.

12. Undersök om $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = x^2$ är ortogonala på intervallet $(-2, 2)$.
Bestäm därefter konstanterna c_1 och c_2 så att $f_3(x) = x + c_1x^2 + c_2x^3$ blir ortogonal mot både f_1 och f_2 på samma intervall.
Lösning:
Vi undersöker om funktionerna är ortogonala genom att först bestämma den inre produkten mellan dessa.
Om den inre produkten är lika med noll så är funktionerna ortogonala.

$$\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = \int_{-2}^{2} f_1(x)f_2(x)dx = \int_{-2}^{2} xx^2dx = \int_{-2}^{2} x^3dx = 0\,,$$

ty udda funktion och origosymmetriskt inteervall.
Den inre produkten är lika med noll och således är funktionerna ortogonala.
Vi skall bilda ett ortogonalt system med hjälp av funktionerna f_1, f_2 och f_3.
Inre produkten mellan f_1 och f_3 lika med noll ger:

$$0 = \langle f_1(x), f_3(x)\rangle = \int_{-2}^{2} f_1(x)f_3(x)dx = \int_{-2}^{2} x(x + c_1x^2 + c_2x^3)dx$$

Inre produkten mellan f_2 och f_3 lika med noll ger:

$$0 = \langle f_2(x), f_3(x)\rangle = \int_{-2}^{2} f_2(x)f_3(x)dx = \int_{-2}^{2} x^2(x + c_1x^2 + c_2x^3)dx$$

Vi erhåller följande system: $\begin{cases} 0 = 2\left(\dfrac{2^3}{3} + c_2\dfrac{2^5}{5}\right) \\ 0 = 2\left(c_1\dfrac{2^5}{5}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} c_2 = -\dfrac{5}{12} \\ c_1 = 0 \end{cases}$.

$f_3(x) = x - \dfrac{5}{12}x^3$ är ortogonal mot de givna funktionerna.

SVAR: $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = x^2$ är ortogonala på intervallet $(-2\,,2)$. $c_1 = 0$ och $c_2 = -\dfrac{5}{12}$.

13. $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ te^t \end{pmatrix}$ är en lösning till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ Bestäm en fundamentalmatris till systemet samt bestäm den lösning som uppfyller villkoret $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>Lösning:</u>
För att bestämma en fundamentalmatris till vårt system behövs två linjärt oberoende lösningar.
Vi bestämmer först systemets matris och därefter dess egenvärden och egenvektorer.

Skriv systemets matris enligt följande $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Insättning av den givna lösningen i systemet ger $\begin{pmatrix} (t+2)e^t \\ (t+1)e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ te^t \end{pmatrix}$.

Hyfsning ger $\begin{pmatrix} (t+2)e^t \\ (t+1)e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t+1)e^t + bte^t \\ c(t+1)e^t + dte^t \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} t+2 \\ t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)t + a \\ (c+d)t + c \end{pmatrix}$

Identifiering ger följande system: $\begin{pmatrix} 1 = a + b \\ 2 = a \\ 1 = c + d \\ 1 = c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{pmatrix}$.

Matrisen är $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

Vi erhåller ett multipelt egenvärde $\lambda_{1,2} = 1$

Tillhörande egenvektor fås ur ekvationen $\begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En ny lösning är $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$. Vi har nu två linjärt oberoende lösningar .

Dessa är $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ och den givna lösningen $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ te^t \end{pmatrix}$.

En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} e^t & (t+1)e^t \\ e^t & te^t \end{pmatrix}$, observera att $\det \Phi = -e^{2t} \neq 0$.

Den allmänna lösningen är en linjärkombination av de linjärt oberoende lösningarna.

Vi får $\mathbf{X} = a\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ te^t \end{pmatrix}$. Bestäm de godtyckliga konstanterna.

Villkoret $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ger: $\mathbf{X}(0) = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Insättning ger $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} (3t+5)e^t \\ (3t+2)e^t \end{pmatrix}$.

SVAR: En fundamentalmatris till systemet är $\Phi = \begin{pmatrix} e^t & (t+1)e^t \\ e^t & te^t \end{pmatrix}$.

Den lösning som uppfyller villkoret är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} (3t+5)e^t \\ (3t+2)e^t \end{pmatrix}$.

14. Skriv differentialekvationen $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -x - x^2 + \left(\dfrac{1}{2} - 3y^2\right)\dfrac{dx}{dt}$ som ett autonomt system.
Studera systemet genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

Lösning:

Vi sätter $y = \dfrac{dx}{dt}$ och $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ varvid följande system erhålles: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - x^2 + \left(\dfrac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$.

Vi startar med att bestämma var tangentvektorn är lika med noll.
Detta ger oss de kritiska(stationära) punkterna.
Därefter studerar vi de kritiska punkternas karaktär genom att undersöka Taylorutvecklingen kring aktuell kritisk punkt, med andra ord en linjarisering. Jacobimatrisen blir då ett viktigt redskap.

Tangentvektorn lika med nollvektorn ger: $\begin{cases} 0 = y \\ 0 = -x - x^2 + \left(\dfrac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$, $\begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = (-1,0) \\ \text{Två kritiska punkter.} \end{cases}$

Jacobimatrisen ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2x & \dfrac{1}{2} - 9y^2 \end{pmatrix}$$

Insättning av respektive kritisk punkt ger:

$(x, y) = (0,0)$

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ har komplexa egenvärden med positiv realdel.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$.

Dessa är $\lambda = \dfrac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

Den kritiska punkten $(0,0)$ är en instabil spiral.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

$(x, y) = (-1,0)$

Matrisen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ har skilda egenvärden och olika tecken.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{16}$.

Dessa är $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Den kritiska punkten $(-1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: De kritiska punkterna är (0,0) och (-1,0).

Den kritiska punkten $(0,0)$ är en instabil spiral.

Den kritiska punkten $(-1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

15. Låt $u(x,t)$ vara temperaturen i en smal stav. med längden L

Vidare gäller att $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < L$, $t > 0$, h är en konstant.

Bestäm temperaturen $u(x,t)$ då begynnelsetemperaturen är $f(x)$ och stavens ändpunkter är isolerade.

Lösning:

Vi separerar variablerna: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $X''(x)T(t) - hX(x)T(t) = X(x)T'(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} + h = \text{konstant} = \lambda$.

Vi erhåller ett system av linjära okopplade differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - (\lambda - h)T(t) = 0 \end{cases}$.

"T-ekvationen" har lösningen: $T(t) = Ce^{(\lambda - h)t}$.

För "X-ekvationen" behandlas tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbf{R}$
$X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$	$X(x) = A_2 x + B_2$	$X(x) = A_3 \cos\mu x + B_3 \sin\mu x$

Stavens ändpunkter är isolerade innebär att $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$.

Tillsammans med variabelseparationen ger detta att: $X'(0)T(t) = X'(L)T(t) = 0$.

Detta skall gälla för alla t: $X'(0) = X'(L) = 0$.

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in R$

$X'(x) = \mu(A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$ $\qquad X'(x) = A_2$ $\qquad X'(x) = \mu(-A_3 \sin \mu x + B_3 \cos \mu x)$

Insättning av ändpunkterna ger:

$\underline{\lambda > 0\,,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \quad R}$ $\qquad \underline{\lambda = 0}$ $\qquad \underline{\lambda < 0\,,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad R}$

$\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu(A_1 - B_1) \\ 0 = X'(L) = \mu(A_1 e^{\mu L} - B_1 e^{-\mu L}) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 0 = X'(0) = A_2 \\ 0 = X'(L) = A_2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 0 = X'(0) = \mu(B_3) \\ 0 = X'(L) = \mu(-A_3 \sin \mu L + B_3 \cos \mu L) \end{cases}$

Endast den triviala lösningen. $\qquad X(x) = B_2$ $\qquad \begin{cases} B_3 = 0 \\ \mu L = n\pi \end{cases}$ $\qquad X(x) = A_3 \cos \dfrac{n\pi x}{L}$

Motsvarande "T-lösningar" blir:

$\underline{\lambda > 0\,,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \quad R}$ $\qquad \underline{\lambda = 0}$ $\qquad \underline{\lambda < 0\,,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad R}$

$T(t) = C_2 e^{-ht}$ $\qquad T(t) = Ce^{(-(\frac{n\pi}{L})^2 - h)t}$

Vi har erhållit två uppsättningar med lösningar.

$\underline{\lambda = 0}$ $\qquad \underline{\lambda < 0\,,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad R}$

$u(x,t) = B_2 C_2 e^{-ht}$ $\qquad u(x,t) = A_3 \cos \dfrac{n\pi x}{L} C_3 e^{(-(\frac{n\pi}{L})^2 - h)t}$

Linjärkombinationer av lösningar är lösning.

Den lösning som uppfyller de givna randvillkoren är på formen:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} e^{-ht} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-((\frac{n\pi}{L})^2 + h)t}$$

Det återstår att bestämma koefficienterna.

Begynnelsevillkoret $u(x, 0) = f(x)$ ger: $f(x) = u(x,\ 0) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$

Koefficienterna är: $a_0 = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x)dx$ och $a_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$.

SVAR: Stavens temperatur är $u(x,t) = \dfrac{a_0}{2} e^{-ht} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-((\frac{n\pi}{L})^2 + h)t}$

$a_0 = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x)dx$ och $a_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$.