

Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I

Onsdagen den 11 juni 2014, kl 0830-1000.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.

En saltlösning med koncentrationen k g/l pumpas in i en tank med hastigheten 2 l/s.

Tanken innehåller 400 l lösning och saltmängden i tanken är 4 g.

Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 2 l/s.

Bestäm först saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t .

Vid tiden $t = 200 \ln 2$ önskas saltmängden 8 g i tanken.

Bestäm koncentrationen k för att detta önskemål skall bli uppfyllt.

Ange även saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t för denna koncentration.

Lösning:

Förändringen av saltmängden per tidsenhet ges av $\frac{dx}{dt} = 2k - 2\frac{x}{400}$.

Hypotes ger: $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{200} = 2k$. Vi har en linjär differentialekvation, dess allmänna lösning erhålles som summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.

Vi får: $x(t) = Ce^{-\frac{t}{200}} + 400k$. Vid starten är saltmängden lika med 4.

Insättning ger konstanten C .

$$x(0) = C + 400k = 4, \quad C = 4 - 400k.$$

Saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t ges av $x(t) = (4 - 400k)e^{-\frac{t}{200}} + 400k$.

Nu över till bestämning av koncentrationen hos den inpumpade lösningen.

Insättning av villkoret ger: $8 = x(200 \ln 2) = (4 - 400k)e^{-\frac{200 \ln 2}{200}} + 400k$.

Vi får: $8 = (2 - 200k) + 400k, \quad k = \frac{3}{100} = 0,03 = 3\%$.

Saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t blir $x(t) = 12 - 8e^{-\frac{t}{200}}$.

SVAR: Saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t är $x(t) = (4 - 400k)e^{-\frac{t}{200}} + 400k$.

Den sökta koncentrationen är $k = 3\%$ och tillhörande saltmängd är $x(t) = 12 - 8e^{-\frac{t}{200}}$.

Modul 2.

Bestäm alla kritiska punkter till systemet $\begin{cases} \dot{x} = x(y - 5) \\ \dot{y} = y(x - 2) \end{cases}$.

Klassificera de eventuella kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

Lösning:

I de kritiska punkterna är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Vi erhåller följande system $\begin{cases} \dot{x} = x(y - 5) \\ \dot{y} = y(x - 2) \end{cases} = \mathbf{f}(x, y)$.

Detta har lösningarna $(0,0)$ och $(2,5)$.

För att klassificera dessa punkter använder vi oss av Jacobimatrisen i den aktuella punkten.

Jacobimatrisen är lika med $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (x,y)} = \begin{pmatrix} y - 5 & x \\ y & x - 2 \end{pmatrix}$.

Vi sätter in de två kritiska punkterna och erhåller därvid följande matriser.

$(0,0)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Egenvärdena är reella och negativa.}$$

Den kritiska punkten är en stabil nod.

$(2,5)$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Egenvärdena är reella och med olika tecken.}$$

Den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.
Motsvarande gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: $(0,0)$ är stabil nod och $(2,5)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

Modul 3.

Någon eller några av följande partiella differentialekvationer

$$u_x = u + x + y, \quad u_y = u + u, \quad uu_x = u_y + u + x, \quad \text{där } u = u(x, y),$$

går att lösa med hjälp av variabelseparation.

Bestäm den lösning som uppfyller villkoret $u(x,0) = 5e^{-x} + 6e^{3x}$.

Lösning:

Det är endast differentialekvationen $u_y = u + u$ som kan lösas med hjälp av variabelseparation.

Vi antar $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Insättning i differentialekvationen ger: $X(x)Y'(y) = X(x)Y(y) + X(x)Y(y)$.

Dividera med $X(x)Y(y)$:

$$\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \frac{Y(y)}{Y(y)} + 1 = \text{konstant} = \lambda.$$

Den partiella differentialekvationen har övergått i ett system av ordinära differentialekvationer:

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1)Y(y) = 0 \end{cases}.$$

Vi får följande lösningar:

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda-1)y} \end{cases}.$$

För varje konstant λ erhålles en lösning på formen $u_\lambda(x,y) = c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda-1)y}$.

Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösning.

Vi får

$$u(x,y) = \sum_{\lambda} \tilde{A}_\lambda c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda-1)y}.$$

Det givna villkoret ger:

$$u(x,0) = 5e^{-x} + 6e^{3x} = \sum_{\lambda} \tilde{A}_\lambda c_\lambda e^{\lambda x}.$$

Detta innebär att

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 & c_{\lambda_1} = 5 \\ \lambda_2 = 3 & c_{\lambda_2} = 6 \end{cases} \quad \text{övriga } c_\lambda = 0.$$

Insättning ger: $u(x,y) = 5e^{-x-2y} + 6e^{3x+2y}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y) = 5e^{-x-2y} + 6e^{3x+2y}$.