

Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I

Till tentamensskrivning tisdagen den 19 augusti 2014.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' - \frac{2}{4-x}y = \frac{2x}{(4-x)^2}, \quad y(0) = 2.$$

Bestäm därefter lösningens existensintervall.

Lösning:

Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen.

Vi bestämmer en integrerande faktor och multiplicerar differentialekvationen med denna.

En integrerande faktor ges av $e^{\int \frac{2}{4-x} dx} = e^{2 \ln |4-x|} = (4-x)^2$.

Differentialekvationen blir $(4-x)^2 y' - 2(4-x)y = 2x$.

Nu kan vänstra ledet skrivas som en derivata: $((4-x)^2 y)' = 2x$.

Integrera med avseende på x : $(4-x)^2 y = x^2 + C$.

Bestäm konstanten med hjälp av villkoret: $(4)^2 \cdot 2 = C$, $C = 32$.

Den sökta lösningen är $y = \frac{x^2 + 32}{(4-x)^2}$. Här ser vi att $x \neq 4$. Detta tillsammans med

villkoret ger att lösningens existensintervall ges av $\{x : x < 4\}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \frac{x^2 + 32}{(4-x)^2}$. Lösningens existensintervall är $\{x : x < 4\}$.

Modul 2.

Funktionerna $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x \ln x$, $y_3(x) = 5x$, $y_4(x) = x^2$ och $y_5(x) = x + x^2$ är lösningar till en linjär tredje ordningens homogen differentialekvation. Bestäm en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen. Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$ och $y''(1) = 1$.

Lösning:

En linjär tredje ordningens homogen differentialekvation har tre linjärt oberoende lösningar och dessa bildar en bas för Lösningssrummet. Av de fem givna lösningarna väljes tre lösningar ut så de blir linjärt oberoende.

Tag till exempel följande: $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x \ln x$ och $y_4(x) = x^2$.

För att visa att dessa lösningar är linjärt oberoende visar vi att Wronskianen är skilt från noll.

$$W(x, x \ln x, x^2) = \begin{vmatrix} x & x \ln x & x^2 \\ 1 & \ln x + 1 & 2x \\ 0 & 1/x & 2 \end{vmatrix} = x(2 \ln x + 2 - 2) - 1(2x \ln x - x) = x > 0$$

En fundamental lösningsmängd är $\{x, x \ln x, x^2\}$.

Den allmänna lösningen kan skrivas $y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x^2$.

Det återstår att bestämma den lösning som uppfyller de givna villkoren.

Bilda första- och andraderivatan.

$$y' = C_1 + C_2(\ln x + 1) + C_3 2x \quad \text{och} \quad y'' = C_2 \frac{1}{x} + C_3 2.$$

$$y(1) = C_1 + C_3$$

$$y'(1) = C_1 + C_2 + C_3 2$$

$$y''(1) = C_2 + C_3 2$$

Systemet har lösningen $C_1 = 1$, $C_3 = 2$, $C_2 = -3$. Den sökta lösningen är $y = x - 3x \ln x + 2x^2$.

SVAR: En fundamentalmängd av lösningar är $\{x, x \ln x, x^2\}$.

Den lösning som uppfyller de givna villkoren är $y = x - 3x \ln x + 2x^2$.

Modul 3.

Bestäm $y(5)$ då $y(t)$ är den lösning till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = \delta(t - 4)$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ och $\delta(t - 4)$ är Diracs deltafunktion.

Lösning:

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = e^{-4s}$.

Insättning av villkoren och hyfsning ger: $Y(s) = \frac{3s + 14 + e^{-4s}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s + 14 + e^{-4s}}{(s+1)(s+2)}$.

Uppdelning ger: $Y(s) = \frac{11}{s+1} - \frac{8}{s+2} + \frac{e^{-4s}}{s+1} - \frac{e^{-4s}}{s+2}$.

Återtransformering ger: $y(t) = 11e^{-t} - 8e^{-2t} + U(t-4)(e^{-(t-4)} - e^{-2(t-4)})$.

Det sökta funktionsvärdet är $y(5) = 11e^{-5} - 8e^{-10} + e^{-1} - e^{-2}$.

SVAR: Det sökta funktionsvärdet är $y(5) = 11e^{-5} - 8e^{-10} + e^{-1} - e^{-2}$.