Institutionen för Matematik, KTH

FX-tentamen, Differentialekvationer II

18/9 2014, 11.00-12.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1.(4 poäng) Bestäm lösningen $u(x,t)$ till värmeledningsekvationen med dämpning

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 2u(x,t) = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ , \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \delta(x-1)\ , \quad -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

där δ är "delta-funktionen", som uppfyller $\int_{\mathbb{R}} \delta(y)dy = 1$ och $\delta(y) = 0$ för $y \neq 0$.

Låt $U(\omega,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$ *vara Fouriertransformen i* x*-led. Då ger Fouriertransformering i* x*-led av* (1)

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} + 2U(\omega,t) = -4\omega^2 U(\omega,t), \quad t > 0$$

för varje $\omega \in \mathbb{R}$*. Denna ordinära differentialekvation har lösningen*

$$U(\omega,t) = U(\omega,0)e^{-4\omega^2 t - 2t}\,.$$

Begynnelsevillkoret $\delta(x-1) = u(x,0)$ *ger med translation (se BETA)* $U(\omega,0) = e^{-i\omega}$ *och*

$$U(\omega,t) = e^{-4\omega^2 t - 2t - i\omega}$$

vars inverstransform med translation och skalning är (se BETA)

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\omega^2 t - 2t - i\omega}\}(x) = e^{-2t}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-4\omega^2 t}\}(x-1) = \frac{e^{-2t}e^{-(x-1)^2/(16t)}}{\sqrt{16\pi t}}.$$