Institutionen för Matematik, KTH

FX-tentamen, Differentialekvationer II

5/6 2014, 10.00-11.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel. Miniräknare är ej tillåtet.

1.(4 poäng) Låt $u(x,t)$ vara utböjningen i positionen x vid tiden t av en sträng som uppfyller

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ , \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = e^{-2|x|}\ , \quad -\infty < x < \infty\,,\\
&\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0\ , \quad -\infty < x < \infty\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Bestäm $u(x,t)$ med hjälp av Fouriertransformen.

Låt $U(\omega,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$ *vara Fouriertransformen av* u *i* x*-led. Då ger Fouriertransformering i* x*-led av* (1)

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial t^2} = -4\omega^2 U(\omega,t), \quad t > 0$$

för varje $\omega \in \mathbb{R}$*. Denna ordinära differentialekvation har karakteristiska ekvationen* $m^2+4\omega^2 = 0$ *som ger lösningen* $m = \pm 2\omega i$ *och*

$$U(\omega,t) = a(\omega)\sin(2\omega t) + b(\omega)\cos(2\omega t)\,.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$
\begin{aligned}
U(\omega,0) &= b(\omega),\\
\frac{\partial U(\omega,0)}{\partial t} &= 0 = 2a(\omega)\omega,
\end{aligned}
$$

så $U(\omega,t) = U(\omega,0)(e^{2i\omega t}+e^{-2i\omega t})/2$*. Dess inverstransform med translation (se BETA) blir*

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega,0)\frac{e^{2i\omega t}+e^{-2i\omega t}}{2}\}(x)\\
&= \frac{u(x+2t,0)+u(x-2t,0)}{2} = \frac{e^{-2|x+2t|}+e^{-2|x-2t|}}{2}.
\end{aligned}
$$