Institutionen för Matematik, KTH

Kontrollskrivning 1, Differentialekvationer II (SF1634) den 10/2 2014, 8.15-10.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.
Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Skrivningen har tre uppgifter. Lämna in lösningar till **högst två** av dessa (om tre lämnas rättas de två sämsta).

Fem poäng räcker för godkänd kontrollskrivning.

1.(4 poäng) Betrakta differentialekvationen

$$y'(t) = -y^3(t) + 1$$

och bestäm $\lim_{t\to\infty} y(t)$, utan att explicit bestämma $y(t)$ för alla t.

Funktionen $f(y) = -y^3 + 1$ *har ett nollställe* $f(1) = 0$ *ty*

$$1 - y^3 = (1-y)(1+y+y^2) = (1-y)\big((y+1/2)^2 + 3/4\big)\,.$$

Vi ser att $y = 1$ *är den enda jämviktspunkten och den är stabil eftersom* $f(y) < 0$ *för* $y > 1$ *och* $f(y) > 0$ *för* $y < 1$ *medför att* $y(t)$ *är växande för* $y < 1$ *och* $y(t)$ *är avtagande för* $y > 1$. *Detta ger gränsvärdet* $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$. *När* y *är nära* 1 *har vi för* $v = y - 1$ *att* $v'(t) = -v(3 + 3v + v^2) \simeq -3v$ *och* $v \simeq Ce^{-3t} \to 0$ *när* $t \to \infty$.

2.(4 poäng) Lös differentialekvationen

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= 3\cos(\omega t)\,,\\ y(0) = y'(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

där $\omega \neq 1$ är en reell konstant.

Det homogena problemet ger karakteristiska ekvationen $m^2 + 1 = 0$ *med lösningarna* $m = \pm i$, *så lösningarna till det homogena problemet är* $y_h(t) = A\cos t + B\sin t$, *för godtyckliga reella konstanter* A *och* B.

Ansatsen $y_p = C\cos\omega t$ *insatt i ekvationen ger* $-C\omega^2 + C = 3$ *vilket medför att* $C = 3/(1-\omega^2)$.

Vi har då lösningen $y = y_h + y_p = A\cos t + B\sin t + 3/(1-\omega^2)\cos\omega t$. *Begynnelsevillkoren ger ekvationerna*

$$y(0) = A + \frac{3}{1-\omega^2} = 0$$
$$y'(0) = B = 0$$

och svaret

$$y(t) = \frac{3}{1-\omega^2}(\cos\omega t - \cos t)\,.$$

3.(4 poäng) Formulera och bevisa en sats om den allmänna lösningens uppdelning i homogen och partikulär lösning till en linjär differentialekvation av andra ordningen.

Se t.ex. boken Sats 4.1.6 eller Persson Böijers, Analys i en variabel, Sats 1 Kapitel 8.