Institutionen för Matematik, KTH

# Kontrollskrivning 2, Differentialekvationer II
# 18/3 2014, 10.15-12.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.
Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Skrivningen har tre uppgifter. Lämna in lösningar till **högst två** av dessa (om tre lämnas rättas de två sämsta).

Fem poäng räcker för godkänd kontrollskrivning.

**1.** (4 poäng) Temperaturen $u(x,t)$ i en oändlig stav uppfyller värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 3u(x,t)\ , \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\ , \quad -\infty < x < \infty.$$

Bestäm temperaturen $u(x,t)$ i positionen $x \in \mathbb{R}$ vid tiden $t > 0$.

*Låt $U(\omega,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$ vara Fouriertransformen i $x$-led. Då ger Fouriertransformering i $x$-led av ekvationen*

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} = -2\omega^2 U(\omega,t) - 3U(\omega,t)\,,$$

*för varje $\omega \in \mathbb{R}$. Denna ordinära differentialekvation har lösningen*

$$U(\omega,t) = A(\omega)e^{-(2\omega^2+3)t}$$

*och begynnelsevillkoret ger $A(\omega) = U(\omega,0) = e^{-\omega^2/2}$, så $U(\omega,t) = e^{-(2\omega^2+3)t-\omega^2/2} = e^{-3t}e^{-\omega^2(\frac{1}{2}+2t)}$. Inverstransformering ger svaret*

$$u(x,t) = e^{-3t}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{4(\frac{1}{2}+2t)}}}{\sqrt{4\pi(\frac{1}{2}+2t)}}\,.$$

**2.**(4 poäng) Utböjningen $u(x,t)$ av en svängande sträng med längden $\pi$, som är fast inspänd i ändarna, löser vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{1}$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0$$

med begynnelsevillkoren

$$u(x,0) = x, \quad 0 < x < \pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Bestäm $u(x,t)$ som en Fourierserie.

*Variabelseparation* $u(x,t) = X(x)T(t)$ *insatt i* (1) *ger* $T''(t)X(x) = 4T(t)X''(x)$ *och*

$$\frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = konstant = \lambda\ .$$

*Den sista ekvationen och dess randvillkor* $X(0) = X(\pi) = 0$ *har de nollskilda lösningarna* $X(x) = \sin(nx)$ *för* $\lambda = -n^2$ *och* $n = 1, 2, 3, \ldots.$. *Detta ger* $T''(t) = -4n^2T(t)$, *som har lösningen* $T(t) = a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)$ *och* $T(t)X(x) = \big(a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)\big)\sin(nx)$ *för godtyckliga konstanter* $a_n$ *och* $b_n$. *Eftersom* (1) *är linjär får vi*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)\big)\sin(nx)\ .$$

*Fourierkoefficienterna* $b_n$ *bestäms från begynnelsevillkoret* $\partial u(x,0)/\partial t = 0$ *till*

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin(nx)$$

*som ger* $b_n = 0$ *för alla* $n = 1, 2, 3, \ldots$ . *Fourierkoefficienterna* $a_n$ *bestäms från begynnelsevillkoret*

$$x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n0)\sin(nx)$$

*till*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

*vilket ger*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(n\pi x)dx = \frac{2}{\pi}([-x\frac{\cos(nx)}{n}]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

*och Fourierserien* $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\cos(2nt)\sin(nx)$.

**3.**(4 poäng) Formulera och motivera Parsevals relation för en Fourierserie. Bara formulering ger inga poäng och motivera betyder att härleda, t.ex. som i kurslitteraturen.