Institutionen för Matematik, KTH

Kontrollskrivning 3, Differentialekvationer II SF1634
22/4 2014, 8.15-10.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.
Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Skrivningen har tre uppgifter. Lämna in lösningar till **högst två** av dessa (om tre lämnas rättas de två sämsta).

Fem poäng räcker för godkänd kontrollskrivning.

1. (4 poäng) Bestäm den allmänna lösningen $X : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ till

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} X(t)$$

och beskriv lösningen när $t \to \infty$.

Vi löser problemet genom diagonalisering av matrisen. Matrisen har egenvärden λ som uppfyller

$$0 = det \begin{bmatrix} -\lambda + 4 & -3 \\ 8 & -\lambda - 6 \end{bmatrix} = (4 - \lambda)(-6 - \lambda) + 24 = \lambda(\lambda + 2)$$

så egenvärdena är $\lambda = 0$ och $\lambda = -2$.

Egenvektorn $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ till egenvärdet $\lambda = 0$ löser

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

vilket ger $4a = 3b$ och t.ex. $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$.

Den andra egenvektorn $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ till egenvärdet $\lambda = -2$ löser

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

vilket ger $2c = d$ och t.ex. $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Vi får den allmänna lösningen

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

för godtyckliga konstanter c_1 och c_2, med gränsvärdet

$$\lim_{t \to \infty} X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}.$$

2. (4 poäng) Antalet $x(t)$ och $y(t)$ av två arter, vid tiden t, modelleras av ekvationssystemet

$$x'(t) = x(t)\big(1 - \frac{y(t)}{2}\big)$$
$$y'(t) = y(t)\big(-\frac{1}{4} + \frac{x(t)}{2}\big)\,.$$

Bestäm systemets jämviktslösningar och avgör karaktären (d.v.s. stabilitet/instabilitet) för en av jämviktslösningarna.

Ekvationen kan skrivas

$$x' = x(1 - y/2) =: g_1(x, y)$$
$$y' = y(-1/4 + x/2) =: g_2(x, y)$$

Vi ser att jämviktsvillkoret $g(x, y) = \big(g_1(x, y), g_2(x, y)\big) = (0, 0)$ *ger två villkor:*

$$\begin{cases} x = 0 \text{ eller } y = 2, \\ y = 0 \text{ eller } x = 1/2. \end{cases}$$

Detta system har två lösningar: $(x, y) = (0, 0)$ *och* $(x, y) = (1/2, 2)$ *vilket är systemets två jämviktspunkter.*

Funktionen g *har Jacobianen*

$$g'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - y/2 & -x/2 \\ y/2 & x/2 - 1/4 \end{bmatrix}$$

och vi får

$$g'(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

vars egenvärden λ *uppfyller*

$$0 = (1 - \lambda)(-1/4 - \lambda)$$

så $\lambda = 1$ *och* $\lambda = -1/4$ *är de två egenvärdena. Dessa har olika tecken. Jämviktspunkten* $(x, y) = (0, 0)$ *är därför en instabil sadelpunkt.*

Den andra jämviktspunkten $(x, y) = (1/2, 2)$ *ger Jacobianen*

$$g'(0.5, 2) = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vars egenvärden λ *uppfyller*

$$0 = \lambda^2 + 1/4$$

med lösningarna $\lambda = \pm i/2$. *Eftersom realdelen av egenvärena är noll ger det linjariserade problemet ingen information om karaktären av denna jämviktspunkt för det ickelinjära systemet.*

3. (4 poäng) Formulera och bevisa en sats om stabilitet för skalära differentialekvationer $y'(t) = g\big(y(t)\big)$ med $g'(y_1) < 0$ i en jämviktspunkt y_1.

Se Sats 10.3.1 och Kapitel 4 i sidorna "Eulers metod" på kurswebbsidan.