Laboration 2: Konstruera en optimal balk analytiskt

Avsikten med denna laboration är att:

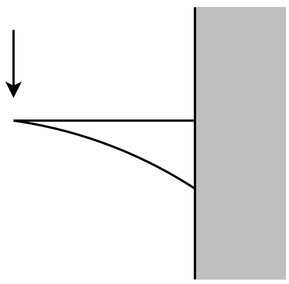
- lösa ett optimeringsproblem med en differentialkekvation som bivillkor,
- se ett exempel på att en differentialekvation kan användas på annat sätt än att bara bestämma lösningen för givna koefficienter - att konstruera en optimal balk är ett sådant exempel på ett inverst problem.

I denna laboration görs en analytisk optimering, med hjälp av vägledande frågor som ger en introduktion till en matematisk metod kallad variationskalkyl där man i någon mening hittar optimum genom att derivera med avseende på en funktion. Ett mål med laborationen är att förstå vad som menas med i "någon mening" i detta fall och hur det relaterar till klassiska derivator.

2a. Vi kan lösa vissa balkproblem analytiskt. Betrakta utböjningen $u(x)$ av en balk som är fast inspänd vid $x = 1$ och fri vid $x = 0$ och antag att utböjningen u löser Bernoulli-Eulers ekvation

$$\begin{aligned}\big(b(x)u''(x)\big)'' = f(x), \quad x \in (0,1)\\ u(1) = u'(1) = b(0)u''(0) = \big(bu''\big)'(0) = 0\end{aligned} \tag{1}$$

med böjstyvheten $b(x)$ och kraften $f(x)$ per längdenhet.



Inspänd balk med varierande tjocklek.

Visa att

$$b(x)u''(x) = \int_0^x \int_0^s f(t)dtds =: F(x)$$

och

$$u(0) = \int_0^1 \int_y^1 \frac{F(s)}{b(s)}dsdy = \int_0^1 \frac{sF(s)}{b(s)}ds.$$

2b. Förklara varför minimum av $u(0)$ med bivillkoret $\int_0^1 b(s)ds = 1$ ges av

$$\min_{\tilde{b}} \int_0^1 \frac{sF(s)}{\tilde{b}(s)} ds \int_0^1 \tilde{b}(s) ds,$$

genom att sätta $b(x) = \tilde{b}(x) / \int_0^1 \tilde{b}(s)ds$ där den positiva funktionen $\tilde{b}$ kan väljas fritt. Ett alternativ till detta är att använda Lagranges metod för bivillkoret som i Laboration 1.

2c. Definiera, för en given funktion $v : [0,1] \to \mathbb{R}$, funktionen $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som

$$G(\epsilon) := \int_0^1 \frac{sF(s)}{\tilde{b}(s) + \epsilon v(s)} ds \int_0^1 \tilde{b}(s) + \epsilon v(s) ds.$$

Förklara varför

$$0 = G'(0) = -\int_0^1 \frac{sF(s)v(s)}{\tilde{b}^2(s)} ds \int_0^1 \tilde{b}(s) ds + \int_0^1 \frac{sF(s)}{\tilde{b}(s)} ds \int_0^1 v(s) ds$$

och att detta ger den optimal böjstyvheten

$$\frac{sF(s)}{\tilde{b}^2(s)} = \text{konstant} = C$$

och $\tilde{b}(s) = \sqrt{sF(s)/C}$.

2d. Vad är optimala lösningen för $f = 1$?