Tentamen Differentialekvationer II SF1634 och 5B1207 5/5 2014

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel. Miniränkare är inte tillåtet.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Godkänd kontrollskrivning nr j ger automatiskt 3 poäng på uppgift nummer j ($j = 1, 2, 3$) och godkänd redovisning och granskning ger 3 poäng på uppgift 4 respektive 5.

Betygsgränser: E 15, D 18, C 22, B 26 och A 31 poäng. Minst 13 poäng, men ej godkänt, ger resultat FX, som innebär rätt till komplettering. De som varit registrerade 2007 eller tidigare (med kursnummer 5B1207) får betyg 5, 4, 3, K eller U. Kraven för de fyra första är som för A, C, E respektive FX ovan.

1. (3 poäng) Bestäm den allmänna lösningen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ till $y'(x) = \big(y(x)\big)^2 - 1$.

Separation av variabler ger

$$\int dx = \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1})dy = \frac{1}{2} ln|\frac{y-1}{y+1}|$$

och för en godtycklig konstant c

$$\pm e^{2x+c} = \frac{y-1}{y+1}$$

vilket ger lösningarna

$$y(x) = \frac{1 \pm e^{2x+c}}{1 \mp e^{2x+c}}$$

för alla konstanter $c \in \mathbb{R}$.

2. (3 poäng) En svängande sträng med utböjningen $u(x,t)$ uppfyller

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) &= 9\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad 0 < x < 1,\ t > 0\,,\\
u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t > 0\,,\\
u(x,0) &= 0, \quad 0 < x < 1,\\
\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\big|_{t=0} &= 1, \quad 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Bestäm $u(x,t)$ som en Fourierserie.

Variabelseparation $u(x,t) = X(x)T(t)$ insatt i ekvationen ger $T''(t)X(x) = 9T(t)X''(x)$ och

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = konstant = \lambda\ .$$

Den sista ekvationen och dess randvillkor $X(0) = X(1) = 0$ har de nollskilda lösningarna $X(x) = \sin(n\pi x)$ för $\lambda = -n^2\pi^2$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$. Detta ger $T''(t) = -9n^2\pi^2 T(t)$, som har lösningen

$T(t) = a_n \cos(3n\pi t) + b_n \sin(3n\pi t)$ *och* $T(t)X(x) = \big(a_n \cos(3n\pi t) + b_n \sin(3n\pi t)\big) \sin(n\pi x)$ *för godtyckliga konstanter* a_n *och* b_n. *Eftersom ekvationen är linjär får vi*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(3n\pi t) + b_n \sin(3n\pi t)\big) \sin(n\pi x) \ .$$

Fourierkoefficienterna a_n *bestäms från begynnelsevillkoret* $u(x,0) = 0$ *till*

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

som ger $a_n = 0$ *för alla* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Fourierkoefficienterna* b_n *bestäms från begynnelsevillkoret*

$$1 = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n\pi b_n \cos(3n\pi 0) \sin(n\pi x)$$

vilket ger

$$3n\pi b_n = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = 2[\frac{\cos(n\pi x)}{-n\pi}]_0^1 = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

och Fourierserien $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1-(-1)^n}{3n^2\pi^2} \sin(3n\pi t) \sin(n\pi x)$.

3. (3 poäng) Funktionerna $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ och $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ löser ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - x(t)y(t)\,, \\ y'(t) &= 2x(t)y(t) - y(t)\,. \end{aligned}$$

Bestäm systemets jämviktspunkter och avgör om möjligt deras karaktär (d.v.s. stabil/instabil) med hjälp av linjarisering.

Ekvationen kan skrivas

$$\begin{aligned} x' &= 1 - xy =: g_1(x,y) \\ y' &= 2xy - y =: g_2(x,y) \end{aligned}$$

Vi ser att jämviktsvillkoret $g(x,y) = \big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big) = (0,0)$ *ger två villkor:*

$$\begin{cases} 1 = xy \\ y = 0 \text{ eller } x = 1/2. \end{cases}$$

Detta system har en lösning: $(x,y) = (1/2, 2)$ *vilket är systemets jämviktspunkt.*

Funktionen g *har Jacobianen*

$$g'(x,y) = \begin{bmatrix} -y & -x \\ 2y & 2x-1 \end{bmatrix}$$

och vi får

$$g'(1/2,2) = \begin{bmatrix} -2 & -1/2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

vars egenvärden λ *uppfyller*

$$0 = (-2-\lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1$$

så $\lambda = -1 \pm i$ *är de två egenvärdena. Dessa har negativ realdel och därför har det linjära problemet samma stabilitetskaraktär som det ickelinjära. Jämviktspunkten* $(x,y) = (1/2,2)$ *är således en stabil spiral.*

4. (3 poäng) Lös för $t > 0$ begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= 6x(t) - y(t), \\ y'(t) &= 5x(t) + 2y(t), \end{aligned}$$

där $x(0) = y(0) = 1$ och $x(t)$, $y(t)$ är reellvärda. Svara med lösningen på reell form.

Vi löser problemet genom diagonalisering av matrisen. Matrisen har egenvärden λ *som uppfyller*

$$0 = det \begin{bmatrix} -\lambda+6 & -1 \\ 5 & -\lambda+2 \end{bmatrix} = (6-\lambda)(2-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda-4)^2 + 1$$

så egenvärdena är $\lambda = 4 \pm i$.

Egenvektorn $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ *till egenvärdet* $\lambda = 4 + i$ *löser*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

vilket ger $b = (2-i)a$ *och t.ex.* $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix}$.

Vi får

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 Re(e^{4t}e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix}) + c_2 Im(e^{4t}e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix}) = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{bmatrix}$$

där c_1 *och* c_2 *är konstanter som bestäms av* $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *till* $c_1 = c_2 = 1$.

5. (3 poäng) Lös integralekvationen

$$f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t-\tau)d\tau, \quad t > 0.$$

Ekvationen kan lösas med Laplacetransformen $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$. Vi har Laplacetransformerna (se BETA)

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},$$
$$\mathcal{L}\{te^t\} = \frac{1}{(s-1)^2},$$
$$\mathcal{L}\{\int_0^t \tau\, f(t-\tau)d\tau\} = \frac{1}{s^2}F(s)$$

som efter Laplacetransformering av integralekvationen ger ekvationen

$$(1 - \frac{1}{s^2})F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}\,,$$

vars lösning är

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2}{(s^2-1)(s-1)^2} = \frac{s^2}{(s-1)^3(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3} \\ &= \frac{A(s-1)^3 + B(s-1)^2(s+1) + C(s+1)(s-1) + D(s+1)}{(s-1)^3(s+1)}, \end{aligned}$$

vilket ger partialbråkekvationerna

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A + C &= 1 \\ 4A + D &= 0 \\ -2A - C + D &= 0 \end{aligned}$$

med lösningen $A = -1/8, B = 1/8, C = 3/4, D = 1/2$. Inverstransformering, med hjälp av transformerna $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ för $n = 0, 1, 2$ och translation, ger svaret $f(t) = -e^{-t}/8 + e^t/8 + 3te^t/4 + t^2e^t/4$.

6. Betrakta en dämpad fjäder med utsträckning $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ som uppfyller

$$x''(t) = -x'(t)\big(\gamma + \beta|x'(t)|\big) - kx(t)\,,$$

med positiva konstanter β, γ och k.

6a. (4 poäng) Bestäm jämviktslösningarna och deras stabilitet.

6b. (2 poäng) Påverkar $\beta > 0$ karaktären av jämvikten?

Ekvationen kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -y(\gamma + \beta|y|) - kx \end{bmatrix}.$$

Vi har en jämviktspunkt $x = y = 0$. Matrisens Jacobian är

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -2\beta|y| - \gamma \end{bmatrix}$$

och i jämviktspunkten

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\gamma \end{bmatrix}$$

vars egenvärden λ uppfyller

$$0 = -\lambda(-\gamma - \lambda) + k = \lambda^2 + \gamma\lambda + k.$$

Egenvärdena blir

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{k - \gamma^2/4}$$

Om $\gamma^2 < 4k$ har vi två komplexvärda egenvärden med negativ realdel, så jämviktspunkten är då en stabil nod även i det ickelinjära problemet. Om $\gamma^2 > 4k$ har vi två reella negativa egenvärden så jämviktspunkten är därför en stabil nod. Om $\gamma^2 = 4k$ har vi också en stabil jämviktspunkt.

Parametern β påverkar inte stabiliteten av jämviktspunkten när $\gamma > 0$, eftersom det linjariserade problemet avgör stabilitetskaraktären.

7. Tätheten $p(x,t)$ av diffunderande partiklar i ett hastighetsfält $v(x) = -x$ uppfyller

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\big(-xp(x,t)\big) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t) = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0\,.$$

7a. (4 poäng) Bestäm med hjälp av Fouriertransformen den tidsoberoende positiva lösning $q(x) = p(x,t)$ som uppfyller $\int_{-\infty}^{\infty} q(x)dx = 1$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |q(x)|^2 dx < \infty$.

7b. (4 poäng) Bestäm, utan att använda Fouriertransformen, den tidsoberoende positiva lösning $q(x) = p(x,t)$ som uppfyller $\int_{-\infty}^{\infty} q(x)dx = 1$ och $q'(x) \to 0$ när $x \to \pm\infty$.

Den tidsoberoende lösningen uppfyller ekvationen

$$\frac{d}{dx}\big(-xq(x)\big) - \frac{d^2}{dx^2}q(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

och dess Fouriertransform $Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x)e^{-i\omega x}dx$ löser då

$$-i\omega i Q'(\omega) + \omega^2 Q(\omega) = 0.$$

Ekvationen kan förenklas till

$$Q'(\omega) + \omega Q(\omega) = 0$$

vars lösning, med t.ex. integrerande faktor, är $Q(\omega) = ce^{-\omega^2/2}$ för en godtycklig konstant c. Villkoret $\int_{-\infty}^{\infty} q(x)dx = 1$ ger $Q(0)) = 1$ så vi har $c = 1$ och inverstransformering ger $q(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

Ekvationen

$$\frac{d}{dx}\big(-xq(x)\big) - \frac{d^2}{dx^2}q(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

kan också lösas genom integrering

$$-xq(x) - q'(x) = c$$

för en godtycklig konstant c. Villkoren $q'(x) \to 0$ när $|x| \to \infty$ och $\int_{-\infty}^{\infty} q(x)dx = 1$ ger $c = 0$. Vi får med separation av variabler

$$\int \frac{dq}{q} = -\int x dx$$

och $\ln q(x) = -x^2/2 + C$ för en godtycklig konstant C. Detta ger $q(x) = e^C e^{-x^2/2}$ och konstanten bestäms av bivillkoret till $e^C = 1/\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$. Konstanten kan bestämmas explicit med BETA eller med byte till polära koordinater

$$e^{-2C} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy = \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr 2\pi = [-e^{-r^2/2}]_0^{\infty} 2\pi = 2\pi.$$

Alternativ uppgift 7b.(4 poäng) Formulera och motivera Parsevals relation för en Fourierserie. Bara formulering ger inga poäng och motivera betyder att härleda, t.ex. som i kurslitteraturen.

8. En konisk damm har volymen V_0. Antag att dammen har ett vattentillflöde av 1 kubikmeter per minut och att vatten försvinner från dammen genom avdunstning proportionellt mot arean av vattenytan.

8a. (4 poäng) Visa att vattenvolymen $V(t)$ i dammen vid tiden t uppfyller ekvationen

$$\frac{d}{dt} V(t) = 1 - \alpha \big(V(t)\big)^{2/3}$$

för en positiv konstant α.

8b. (2 poäng) Bestäm jämviktsvolymen av vatten. Är jämvikten stabil?

8c. (2 poäng) Formulera ett villkor som garanterar att dammen inte överfylls.

Dammens volym är $V_0 = BH/3$ där B är dammens basyta och H dess höjd. Om dammen är fylld till höjden h är vattenytans area $b = Bh^2/H^2$ och vattenvolymen

$$V = \frac{bh}{3} = \frac{B}{3H^2} h^3$$

vilket ger $h = C_1 V^{1/3}$ där C_1 är en positiv konstant. Vattenbasytans area blir

$$b = \frac{B}{H^2} h^2 = \frac{B}{H^2} C_1^2 V^{2/3} = C_2 V^{2/3},$$

för en positiv konstant C_2. Eftersom vattentillflödet är 1 och avdunstningen är proportionell mot vattenbasytans area får vi att vattenvolymens derivata är

$$V'(t) = 1 - \alpha V^{2/3},$$

för en positiv konstant α.

Jämviktsvillkoret $V'(t) = 0$ betyder att $0 = 1 - \alpha V^{2/3} =: g(V)$, vilket ger $V = V_* = \alpha^{-3/2}$. Vi har $g'(V_*) = -2\alpha^{3/2}/3 < 0$, så jämviktspunkten är asymptotiskt stabil.

Eftersom jämviktspunkten $V = V_*$ *är stabil är* $V_0 \geq V_*$ *ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att inte överfylla dammen, förutsatt att* $V(0) \leq V_0$.