1. (3 poäng) Antag att en partikel rör sig i ett medium där friktionskraften är proportionell mot kvadraten av hastigheten $v(t) \in \mathbb{R}$ så att

$$\frac{dv(t)}{dt} = -k\big(v(t)\big)^2, \quad t > 0$$

för en konstant $k > 0$. Bestäm $v(t)$ som funktion av $v(0), k$ och $t \in \mathbb{R}$. Låt $dx(t)/dt = v(t)$. Bestäm också den tillryggalagda sträckan $x(t)$ som funktion av $x(0), v(0)$ och t.

Ekvationen är separabel

$$-\int \frac{dv}{v^2} = \int k dt$$

så

$$\frac{1}{v(t)} = \frac{1}{v(0)} + kt = \frac{1 + v(0)kt}{v(0)}$$

och vi får hastigheten $v(t) = \frac{v(0)}{1+v(0)kt}$. *Detta ger sträckan*

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v(0)\int_0^t \frac{dt}{1 + v(0)kt} \\ &= x(0) + \frac{1}{k}\ln\big(1 + \mathrm{v(0)kt}\big). \end{aligned}$$

2. (3 poäng) Bestäm jämviktspunkterna för differentialekvationen

$$\frac{dx(t)}{dt} = k\big(\alpha - x(t)\big)\big(\beta - x(t)\big)\,,$$

där k och $\alpha > \beta$ är positiva konstanter och $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Klassificera också jämviktspunkterna med avseende på stabilitet. Ekvationen behöver inte lösas.

Ekvationen kan skrivas $x'(t) = g(x(t))$ *med* $g(x) = k(\alpha - x)(\beta - x)$. *Jämviktspunkterna bestäms av lösningarna till* $0 = g(x)$ *vilket ger* $x = \alpha$ *och* $x = \beta$. *Vi har* $g'(x) = -k(\beta - x) - k(\alpha - x)$, *så* $g'(\alpha) = -k(\beta - \alpha) > 0$ *och* $g'(\beta) = -k(\alpha - \beta) < 0$. *Därför är* $x = \beta$ *en asymptotiskt stabil jämviktspunkt och* $x = \alpha$ *är en instabil jämviktspunkt.*

3. (3 poäng) Betrakta funktioner $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ och $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ som löser systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \epsilon x(t) - y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) + \epsilon y(t). \end{aligned}$$

Bestäm systemets jämviktspunkter och avgör deras karaktär som funktion av konstanten $\epsilon \in \mathbb{R}$. Systemet behöver inte lösas.

Jämviktspunkterna löser

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon x - y, \\ 0 &= x + \epsilon y, \end{aligned}$$

vilket ger $y = \epsilon x$ *och* $x(1+\epsilon^2) = 0$ *vars lösning är* $x = y = 0$. *Jacobianen till högerledet är den konstanta matrisen*

$$\begin{bmatrix} \epsilon & -1 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

dess egenvärden λ *uppfyller*

$$0 = \det \begin{bmatrix} \epsilon - \lambda & -1 \\ 1 & \epsilon - \lambda \end{bmatrix} = (\epsilon - \lambda)^2 + 1,$$

så $\lambda = \epsilon \pm i$. *Om* $\epsilon < 0$ *är jämviktspunkten* $(0,0)$ *en asymptotiskt stabil spiral, om* $\epsilon = 0$ *är jämviktspunkten* $(0,0)$ *en stabil centrumpunkt och om* $\epsilon > 0$ *är jämviktspunkten* $(0,0)$ *en instabil spiral.*

4. (3 poäng) Bestäm den allmänna lösningen $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ och $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ till systemet

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + \epsilon y(t),$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t),$$

där $\epsilon \in (0,1)$ är en konstant.

Jacobianen till högerledet är den konstanta matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & \epsilon \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

vars egenvärden λ *uppfyller*

$$0 = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & \epsilon \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 + \lambda)^2 - \epsilon,$$

så $\lambda = \lambda_\pm = -1 \pm \sqrt{\epsilon}$.

Ekvationen för en egenvektor

$$0 = \begin{bmatrix} -1 - \lambda & \epsilon \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ger $a = \epsilon b/(1 + \lambda_\pm) = \pm b\sqrt{\epsilon}$.

Egenvärdet λ_+ *ger egenvektorn* $\begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon} \\ 1 \end{bmatrix}$ *och egenvärdet* λ_- *ger egenvektorn* $\begin{bmatrix} -\sqrt{\epsilon} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vi får den allmänna lösningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_+ e^{(-1+\sqrt{\epsilon})t} \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon} \\ 1 \end{bmatrix} + c_- e^{(-1-\sqrt{\epsilon})t} \begin{bmatrix} -\sqrt{\epsilon} \\ 1 \end{bmatrix}$$

för godtyckliga reella konstanter $c_\pm$.

5. (3 poäng) Betrakta funktionerna $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ och $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ som löser systemet

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + \epsilon y(t),$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t),$$

där $\epsilon = 1/9$ och $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Bestäm $y(t)$ med hjälp av Laplacetransformen.

Låt $Z(s) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} e^{-st} dt$ *vara Laplacetransformen av lösningen. Laplacetransformering av ekvationen ger*

$$sZ(s) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \epsilon \\ 1 & -1 \end{bmatrix} Z(s)$$

och vi får

$$\begin{aligned} Z(s) &= \begin{bmatrix} 1+s & -\epsilon \\ -1 & 1+s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2 - \epsilon} \begin{bmatrix} 1+s & \epsilon \\ 1 & 1+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+1)^2-\epsilon} \\ \frac{1}{(s+1)^2-\epsilon} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Inverstransformering ger

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s+1)^2 - \epsilon} \\ &= \frac{1}{2\epsilon^{1/2}} \mathcal{L}^{-1} \Big(\frac{1}{(s+1) - \epsilon^{1/2}} - \frac{1}{(s+1) + \epsilon^{1/2}} \Big) \\ &= \frac{1}{2\epsilon^{1/2}} \big(e^{(-1+\epsilon^{1/2})t} - e^{(-1-\epsilon^{1/2})t} \big), \end{aligned}$$

där $\epsilon = 1/9$.

6a. (4 poäng) Temperaturen $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ i en stav med diffusionsfunktion $k : [0, 1] \to (0, \infty)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{d}{dx}\big(k(x)\frac{du(x)}{dx}\big) = 0, \qquad 0 < x < 1 \tag{1}$$

där temperaturen vid $x = 0$ är $u(0) = 0$ och värmeflödet vid $x = 1$ uppfyller $k(1)u'(1) = 1$. Bestäm temperaturen $u(x)$ med ett uttryck beroende på k.

6b. (6 poäng) Antag att staven i uppgift 6a består av ett kompositmaterial med N skikt där

$$k(x) = \begin{cases} k_1 = 1 & n\Delta x < x \le (n + \frac{1}{2})\Delta x, \\ k_2 = 2 & (n + \frac{1}{2})\Delta x < x \le (n+1)\Delta x, \end{cases}$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ och $\Delta x = 1/N$. Bestäm en konstant konduktivitet k_* så att

$$u(n\Delta x) = u_*(n\Delta x) \text{ för } n = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

där u löser (1) och $u_*(x)$ är temperaturen i en homogen stav med konstant diffusionsparameter k_* som uppfyller

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big(k_* \frac{du_*(x)}{dx}\big) &= 0, \qquad 0 < x < 1,\\ u_*(0) &= 0,\\ k_* \frac{du_*(x)}{dx}\Big|_{x=1} &= 1\,.\end{aligned}$$

Integration av ekvationen (1) ger

$$k(x)u'(x) = C$$

och randvillkoret vid $x = 1$ medför $C = 1$, så $u'(x) = 1/k(x)$. En ytterligare integration och randvillkoret $u(0) = 0$ visar att

$$u(x) = \int_0^x \frac{dy}{k(y)}\,. \tag{2}$$

Vi har som i uppgift 6a att $k_* u_*' = 1$ och $u_*' = 1/k_*$ så randvillkoret $u_*(0) = 0$ ger $u_*(x) = x/k_*$. Uttrycket (2) ger

$$u(n\Delta x) = \int_0^{n\Delta x} \frac{dx}{k(x)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{n\Delta x}{k_1} + \frac{n\Delta x}{k_2}\Big)$$

så villkoret $u_*(n\Delta x) = u(n\Delta x)$ ger

$$\frac{1}{k_*} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\Big)\,.$$

Vi får

$$k_* = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2} = \frac{4}{3}\,.$$

7. Temperaturen $u(x,t)$, i positionen x vid tiden t, i en homogen stav med konstant diffusionsparameter k_* uppfyller

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= k_* \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,\\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= 0, \qquad t > 0,\\ u(0,t) &= 0, \qquad t > 0,\\ u(x,0) &= x\Big(1 - \frac{x}{2}\Big), \quad 0 < x < 1\,.\end{aligned}$$

7a. (4 poäng) Bestäm $u(x,t)$ som en Fourierserie.
7b. (3 poäng) Bestäm ett närmevärde till $\max_{0\le x\le 1} u(x,1)$ när $k_* = \ln 2$.

Variabelseparationsansatsen $u(x,t) = T(t)X(x)$ *insatt i ekvationen ger*

$$X(x)T'(t) = k_* T(t)X''(x)$$

och

$$\frac{T'(t)}{k_* T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Eftersom högerledet beror bara på x *och vänsterledet bara på* t *måste vänsterledet och högerledet vara en konstant* λ. *Vi får* $X'' = \lambda X$. *Om* $\lambda = -\alpha^2 < 0$ *får vi med karakteristiska ekvationen lösningen* $X(x) = a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x)$. *Randvillkoren ger* $0 = a$ *och* $0 = -a\alpha\sin\alpha + b\alpha\cos\alpha$ *vars lösning är* $\alpha = \pi(n+1/2)$ *för* $n = 0, 1, 2, \ldots$. *På samma sätt ger* $\lambda \geq 0$ *endast* $X(x) = 0$ *som lösning.*

Ekvationen för T *blir* $T'/(k_* T) = -\alpha^2 = -\pi^2(n+1/2)^2$ *och vi får lösningen* $T(t) = ce^{-k_*\pi^2(n+1/2)^2 t}$, *vilket ger* $u(x,t) = b_n e^{-k_*\pi^2(n+1/2)^2 t}\sin(\pi(n+1/2)x)$. *Eftersom ekvationen är linjär är också summan*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-k_*\pi^2(n+1/2)^2 t}\sin(\pi(n+1/2)x)$$

en lösning. Koefficienterna b_n *bestäms av begynnelsevillkoret*

$$x - x^2/2 = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\pi(n+1/2)x)$$

och ortogonaliteten

$$\begin{aligned}
b_n/2 &= \int_0^1 (x - x^2/2)\sin(\pi(n+1/2)x)dx = -\int_0^1 (x-x^2/2)\frac{d}{dx}\frac{\cos(\pi(n+1/2)x)}{\pi(n+1/2)}dx \\
&= -[(x-x^2/2)\frac{\cos(\pi(n+1/2)x)}{\pi(n+1/2)}]_0^1 + \int_0^1 (1-x)\frac{\cos(\pi(n+1/2)x)}{\pi(n+1/2)}dx \\
&= [(1-x)\frac{\sin(\pi(n+1/2)x)}{\pi^2(n+1/2)^2}]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin(\pi(n+1/2)x)}{\pi^2(n+1/2)^2}dx \\
&= \frac{1}{\pi^3(n+1/2)^3}
\end{aligned}$$

Vi får temperaturen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^3(n+1/2)^3} e^{-k_*\pi^2(n+1/2)^2 t}\sin(\pi(n+1/2)x)\,.$$

Låt $t = 1$ *och* $k_* = \ln 2$. *Temperaturen* u *domineras av den första termen i summan som vid* $x = 1$ *har sitt maximum*

$$\frac{16}{\pi^3}e^{-\ln 2\,\pi^2/4} = \frac{16}{\pi^3}2^{-\pi^2/4} \approx \frac{16}{31}2^{-10/4} = \frac{2\sqrt{2}}{31} \approx 0.09\,.$$

De resterande termerna kan uppskattas enligt följande. Vi har med hjälp av integraluppskattning av en avtagande funktion

$$
\begin{aligned}
|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^3(n+1/2)^3}e^{-k_*\pi^2(n+1/2)^2t}\sin(\pi(n+1/2)x)| &\le 2e^{-k_*\pi^2(1+1/2)^2t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^3(n+1/2)^3} \\
&\le 2\pi^{-3}e^{-k_*\pi^2(1+1/2)^2t}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1/2)^3} \\
&= \pi^{-3}e^{-k_*\pi^2(1+1/2)^2t}4
\end{aligned}
$$

Den första termen i summan för u är

$$\frac{2}{\pi^3(1/2)^3}e^{-k_*\pi^2(1/2)^2t}\sin(\pi(1/2)x)\,.$$

Det relativa felet att ersätta u med första termen vid $x=1$ blir mindre än $e^{-k_*t\pi^2 8/4}\frac{1}{4} = 2^{-2\pi^2}\frac{1}{4} < 2^{-21} < 10^{-6}$.

8.(5 poäng) Låt $u(x,t)$ vara utböjningen i positionen x vid tiden t av en sträng som uppfyller

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\
&u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \\
&\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Bestäm $u(x,t)$ med hjälp av Fouriertransformen.

Låt $U(\omega,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$ *vara Fouriertransformen av u i x-led. Då ger Fouriertransformering i x-led av* (3)

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial t^2} = -9\omega^2 U(\omega,t), \quad t > 0$$

för varje $\omega \in \mathbb{R}$. Denna ordinära differentialekvation har karakteristiska ekvationen $m^2+9\omega^2=0$ som ger lösningen $m=\pm 3\omega i$ och

$$U(\omega,t) = a(\omega)\sin(3\omega t) + b(\omega)\cos(3\omega t)\,.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$
\begin{aligned}
U(\omega,0) &= b(\omega), \\
\frac{\partial U(\omega,0)}{\partial t} &= 0 = 3a(\omega)\omega,
\end{aligned}
$$

så $U(\omega,t)=U(\omega,0)(e^{3i\omega t}+e^{-3i\omega t})/2$. *Dess inverstransform med translation (se BETA) blir*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega,0)\frac{e^{3i\omega t}+e^{-3i\omega t}}{2}\}(x) \\ &= \frac{u(x+3t,0)+u(x-3t,0)}{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+(x+3t)^2}+\frac{1}{1+(x-3t)^2}\Big). \end{aligned}$$

Alternativ uppgift 8.(5 poäng) Formulera och bevisa en sats om stabilitet för skalära differentialekvationer $y'(t)=g(y(t))$ med $g'(y_1)<0$ i en jämviktspunkt y_1.

se Sats 10.3.1 och Kapitel 4 i sidorna "Eulers metod" på kurswebbsidan.