

Kontrollskrivning 2, version A,
i SF1635 Signaler och system I.
tisdag 17 december 2013, klockan 10.15–11.15
LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Lösning

Vi observerar att vi i HL har en exponentialterm e^{-2s} som indikerar tidsfördröjning. Det gör att vi separerar termer med resp utan fördröjningsfaktor. Om vi skriver H.L. i texten som

$$F(s) = \underbrace{\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}}_{F_1(s)} + \underbrace{\frac{5e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}}_{F_2(s)e^{-2s}} \quad (1)$$

leder en enkel partialbråksuppdelning till

$$F_1(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (2)$$

$$F_2(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+2} \quad (3)$$

Formelbladet ger nu

$$f_1(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\mathcal{U}(t) \quad (4)$$

$$f_2(t) = 5(e^{-t} - e^{-2t})\mathcal{U}(t) \quad (5)$$

Eftersom ekv(1) innebär att

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s)e^{-2s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = f_1(t) + f_2(t-2) \quad (6)$$

får vi svaret

$$f(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\mathcal{U}(t) + 5(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)})\mathcal{U}(t-2)$$

2) Lösning

i) Eigenvärden fås m h a sambanden:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0$$

som ger egenvärdena $\lambda = \pm 5$ som i sin tur leder till

ii) egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\begin{bmatrix} 4 - 5 & 3 \\ 3 & -4 - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \implies -v_{11} + 3v_{12} = 0, \implies \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

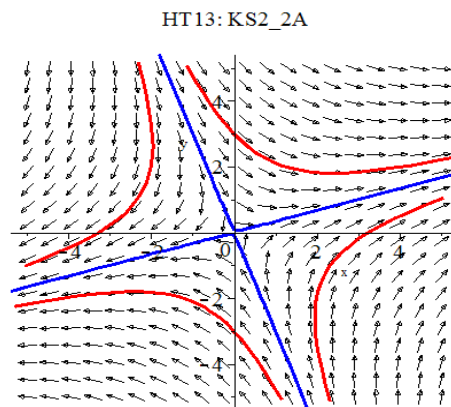
och p s s

$$\begin{bmatrix} 4 + 5 & 3 \\ 3 & -4 + 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \implies 3v_{21} + v_{22} = 0, \implies \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

iii) Detta ger oss nu den allmänna lösningen i matrisform

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

iv) Eftersom våra egenvärden har motsatt tecken blir slutsatsen att origo är en sadelpunkt, m a o en instabil nod.



Figur 1: $x' = 4x + 3y, y' = 3x - 4y$
