SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2014–03–12

1) Lösning

Man har att

$$x^2y' - xy = x^2 - 1 \Longleftrightarrow y' - \frac{1}{x}\,y = 1 - \frac{1}{x^2} \tag{1}$$

som är en linjär ekvation med integrerande faktor $h(x) = \mathrm{e}^{\int(-1/x)dx} = \frac{C}{x}$. Multipliceras den högra ekvationen i ekv(1) med $\frac{1}{x}$, så får man

$$\frac{1}{x}\,y' - \frac{1}{x^2}\,y = \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$$

och efter integration

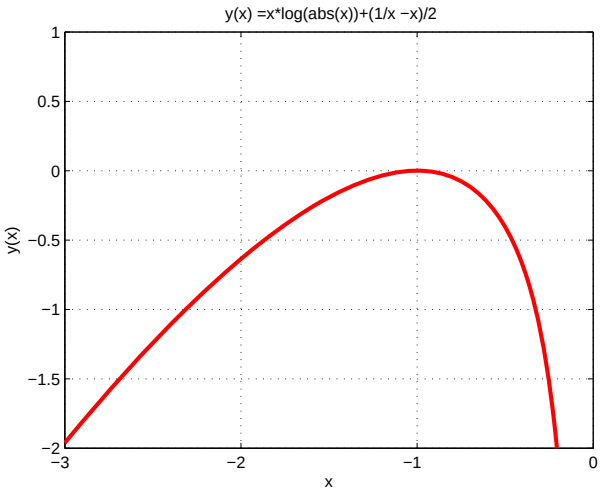
$$\frac{y}{x} = \ln|x| + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C.$$

Begynnelsevillkoret $y(-1) = 0$ ger till slut:

$$0 = \ln 1 + \frac{1}{2} + C \Longrightarrow C = -\frac{1}{2},$$

d v s största intervallet, som lösningen kring $x = -1$ är definierad i, är $x < 0$.

Svaret är alltså $\boxed{y = x\ln|x| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right),\ x < 0.}$



Figur 1: $y = x\ln|x| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right),\ x < 0$

2) Lösning

Vi börjar som vanligt med att skriva ODE'n på standardform

$$y'' - \frac{5}{x}\,y' + \frac{8}{x^2}\,y = 8\,x^4, \tag{2}$$

Därefter ansätter vi, enligt teorien,

$$\begin{aligned} y(x) &= u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8x^4 \end{pmatrix} && (3) \\ &\Longrightarrow u_1' = \frac{W_1}{W} \text{ och } u_2' = \frac{W_2}{W} && (4) \end{aligned}$$

med

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^4 \\ 2x & 4x^3 \end{vmatrix} = 2x^5,\ W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^4 \\ 8x^4 & 4x^3 \end{vmatrix} = -8x^8,\ W_2 = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 8x^4 \end{vmatrix} = 8x^6 \tag{5}$$

Insättning i ekv(4) leder till

$$u_1' = \frac{-8x^8}{2x^5} = -4x^3 \Longrightarrow u_1 = -x^4 \text{och } u_2' = \frac{8x^6}{2x^5} = 4x \Longrightarrow u_2 = 2x^2 \tag{6}$$

Detta resulterar i den allmänna lösningen

$$\boxed{y_{\text{allm}}(x) = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + c_1x^2 + c_2x^4 = x^6 + c_1x^2 + c_2x^4}$$

Insättning av $y(1/2) = y'(1/2) = 0$ leder till $c_1 = \frac{1}{16}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ och svaret blir

$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{2} + x^6}$$

3) Lösning

i) Egenvärden fås m h a sambanden:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

som ger egenvärdena $\lambda_{1,2} = \pm i$, där $\lambda_1 = i$ leder i sin tur till

ii) egenvektorn $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow -v_{11} + v_{12}(1-i) = 0, \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix};$$

Detta resulterar i

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{it} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] (\cos t + i \sin t) \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \tag{8}$$

iii) Från teorien vet vi att den allmänna lösningen fås via

$$\mathbf{X}_{\text{allm}}(t) = c_1 \mathrm{Re}\{\mathbf{X}_1(t)\} + c_2 \mathrm{Im}\{\mathbf{X}_1(t)\} \tag{9}$$

som i vårt fall, se ekv(8), ger svaret i matrisform

$$\boxed{\mathbf{X}_{\text{allm}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}$$

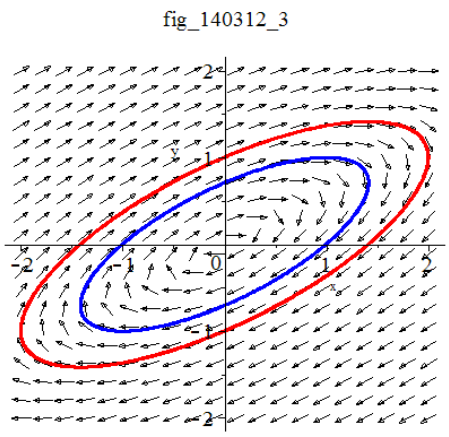
iv) Svaret ovan ger

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies c_1 = 0,\ c_2 = -1 \tag{10}$$

som leder till kurvan som är utritad blått i fasporträttet,

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t + \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \tag{11}$$

v) Eftersom våra 2 egenvärden är imaginära blir slutsatsen att origo är ett centrum.



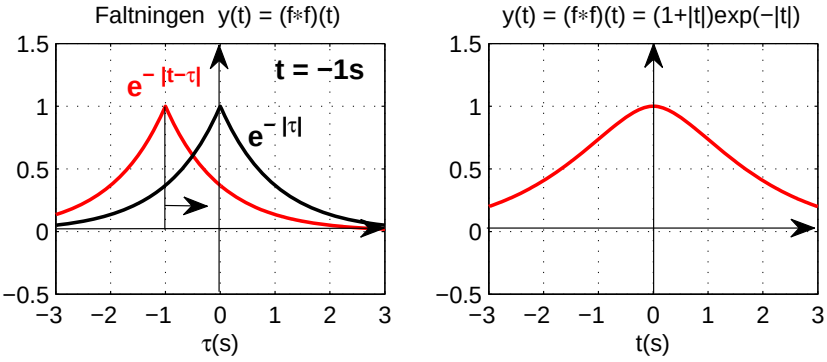
Figur 2: $x' = -x + 2y, y' = -x + y$

4) Lösning

Faltningen $y(t) = (f * f)(t)$ är definitionsmässig

$$(f * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|\tau|}\mathrm{e}^{-|t-\tau|}d\tau \tag{12}$$

Eftersom våra funktioner är jämna så räcker det att studera fallet $t < 0$.
Svaret för $t > 0$ får vi sedan m h a symmetri betraktelser.
För fallet $t < 0$ får vi härmed, se Fig 3:



Figur 3: $y(t) = \mathrm{e}^{-|t|} * \mathrm{e}^{-|t|}$

$$\begin{aligned}
(f * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|\tau|}\mathrm{e}^{-|t-\tau|}d\tau && (13)\\
&= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\tau}\mathrm{e}^{-t+\tau}d\tau + \int_{t}^{0} \mathrm{e}^{\tau}\mathrm{e}^{t-\tau}d\tau + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{t-\tau}d\tau && (14)\\
&= \frac{\mathrm{e}^t}{2} - t\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^t}{2} = (1-t)\mathrm{e}^t && (15)
\end{aligned}$$

För $t \geq 0$ får vi $(t \to -t)$

$$(f * f)(t) = (1+t)\mathrm{e}^{-t} \tag{16}$$

som leder till svaret

$$\boxed{y(t) = (f * f)(t) = (1+|t|)\mathrm{e}^{-|t|}}$$

Problemlösning m h a Fourier-transformen:
BETA 5:th ed, F44, sid 319, $k = c = 0$, $a = 1$, $b = 4$ ger

$$y(t) = (f * f)(t)) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\omega)F(\omega) = \frac{4}{(1+\omega^2)^2} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-|t|}(4|t|+4) = (1+|t|)\mathrm{e}^{-|t|} \tag{17}$$

samma som ovan.

5) Lösning

$\mathscr{L}$-transformen av den givna ODE leder till

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \mathrm{e}^{-s\pi/2} \tag{18}$$

Insättning av begynnelsevärden ger

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = ((s+1)^2 + 1)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \mathrm{e}^{-s\pi/2} \tag{19}$$

Alltså

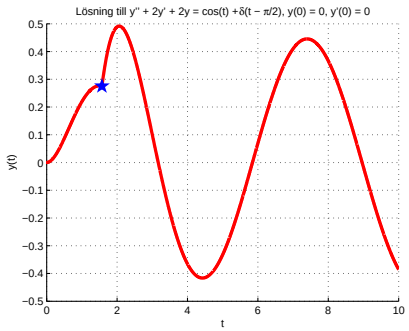
$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)((s+1)^2+1)} + \frac{\mathrm{e}^{-s\pi/2}}{(s+1)^2+1} \tag{20}$$

och nu ger partialbråksuppdelning

$$Y(s) = \frac{1}{5}\left[\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{3}{(s+1)^2+1}\right] + \frac{\mathrm{e}^{-s\pi/2}}{(s+1)^2+1} \tag{21}$$

där BETA, resp FS(rosa), leder till svaret

$$\boxed{y = \tfrac{1}{5}\left[\cos t + 2\sin t - \mathrm{e}^{-t}\cos t - 3\mathrm{e}^{-t}\sin t\right] + \mathcal{U}(t-\pi/2)\mathrm{e}^{-(t-\pi/2)}\sin(t-\pi/2)}$$



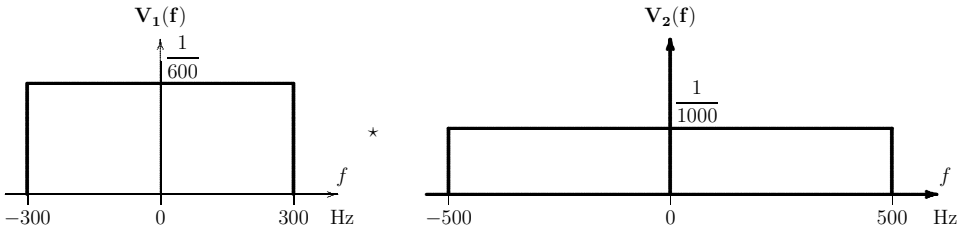
6) Lösning

a) FS(rosa)[sid9(4.19)] ger oss

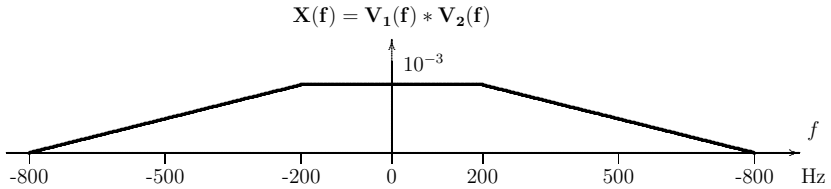
$$v_1(t) = \mathrm{sinc}(600t) \quad \xrightarrow{\mathfrak{F}} \quad V_1(f) = \frac{1}{600}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{600}\right) \tag{22}$$

$$v_2(t) = \mathrm{sinc}(1000t) \quad \xrightarrow{\mathfrak{F}} \quad V_2(f) = \frac{1}{1000}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{1000}\right) \tag{23}$$

Vi konstaterar att X har nu bandbredden $B_X = 800$ Hz, som innebär att vi i detta fall har $f_{s,min} = 1600$ Hz vilket är större än det givna $f_s = 1000$ Hz. Slutsats: Vi har aliasing, överlappning, innebärande att vi inte kan rekonstruera $x(t)$ exakt!



Figur 4: $V_1(f)$, $V_2(f)$



Figur 5: $X(f)$

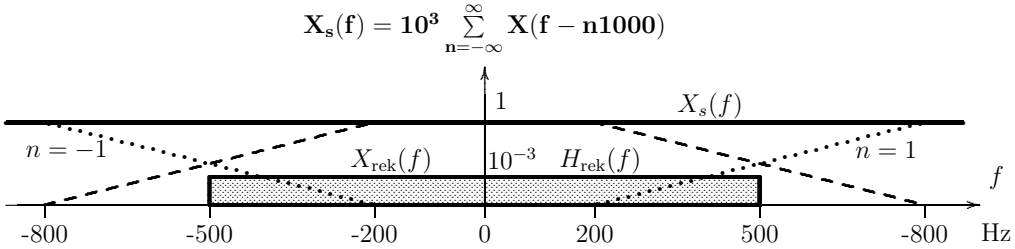
b) Här gäller det att studera Fourier-transformen av den samplade signalen:

$$X_s(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) = 10^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n\,10^3) \tag{24}$$

Nedanstående Figur 6 visar de intressanta bidragen för $n = 0$ och ± 1 till $X_s(f)$ nämligen

$$X_s(f) = 10^3(\cdots + X(f + 10^3) + X(f) + X(f - 10^3) + \ldots) \tag{25}$$

och visas som streckade, $n = 0$, resp punktade, $n = \pm 1$, linjerna:



Figur 6: $X_s(f)$ och $X_{\text{rek}}(f)$

c) Som syns blir den samplade signalen $X_s(f) = 1$, lika med den feta räta linjen. Eftersom vi vet att

$$X_{\text{rek}}(f) = H_{\text{rek}}(f) \cdot X_s(f) = T\,\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \cdot 1 = 10^{-3}\,\text{rect}\left(\frac{f}{1000}\right) \tag{26}$$

ser vi att den skuggade arean i Figur 6 är svaret till problemet c).
