# SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2015-01-07

## 1) Lösning

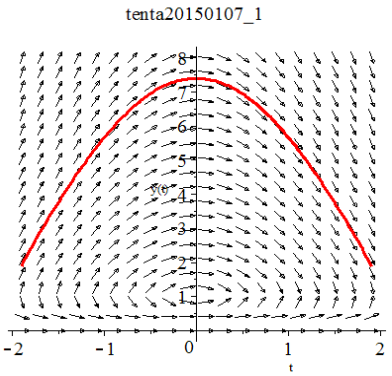
Separation och integration av ODE:n ger för $y \neq 1$

$$\int \frac{\ln y}{y} dy = \int -x dx \Longrightarrow \ln^2 y = -x^2 + C_1 \tag{1}$$

Insättning av BV $y(0) = \mathrm{e}^2$ leder till $C_1 = 4$ och svaret blir

$$\boxed{y = \mathrm{e}^{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{för} \quad |x| < 2}$$

Observera att randen $|x| = 2$ inte ingår i existensintervallet, ty där blir $\ln y = \ln 1 = 0$ som gör $\dfrac{xy}{\ln y}$ odefinierad.




Figur 1: $y = \mathrm{e}^{\sqrt{4-x^2}}, |x| < 2$

## 2) Lösning

a) Egenvärden fås ur

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \Longrightarrow \lambda_{1,2,3} = -1, -2, -3 \tag{2}$$

som i sin tur leder till egenvektorerna

$$\lambda = -1, \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\lambda = -2, \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\lambda = -3, \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

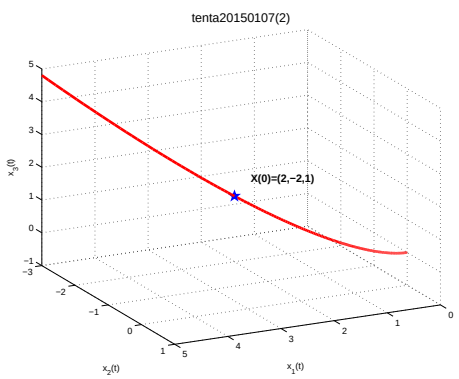
$$\boxed{\mathbf{X}(t) = \mathrm{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{B} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{C} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t}}$$

b)

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Matrissambandet (6) ger oss först $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = 1$ och med detta blir svaret

$$\boxed{\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t}}$$




Figur 2: $x_1' = -x_1 + x_2 + x_3, x_2' = -2x_2 + x_3, x_3' = -3x_3$

---

## 3) Lösning

---

a) Vi vet att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{j2\pi nt/T} \text{ med } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \mathrm{e}^{-j2\pi nt/T} dt \text{ och } T = 2 \tag{7}$$

I vårt fall gäller att

$$x(t) = |t| + t = \begin{cases} 2t, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Detta leder till

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,\mathrm{e}^{-j2\pi nt/2}dt = \langle n \neq 0\rangle = t\,\frac{\mathrm{e}^{-j\pi nt}}{-j\pi n}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-j\pi nt}}{j\pi n}dt = \tag{9}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-j\pi n}}{-j\pi n} + \frac{\mathrm{e}^{-j\pi nt}}{\pi^2 n^2}\bigg|_0^1 = j\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} = \tag{10}$$

$$= \begin{cases} \frac{j}{n\pi}, & \text{n jämn;} \\ -\frac{j}{n\pi} - \frac{2}{(n\pi)^2}, & \text{n udda.} \end{cases} \tag{11}$$

För $c_0$ får man istället

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,dt = \frac{1}{2} \tag{12}$$

Svaret kan härmed antingen skrivas som

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{j\mathrm{e}^{j\pi 2nt}}{2n\pi} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{j}{(2n+1)\pi} + \frac{2}{((2n+1)\pi)^2}\right]\mathrm{e}^{j\pi(2n+1)t} \tag{13}$$

eller som

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\left[j\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2}\right]\mathrm{e}^{j\pi nt} \tag{14}$$

b) I en diskontinuitetspunkt $t$ gäller

$$x(t) = \frac{x(t+) + x(t-)}{2} \Longrightarrow x(1) = \frac{x(1+) + x(1-)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \tag{15}$$

Svar: $x(1) = 1$

**Annan metod:** Man kan också använda BETA genom att ta Fourierserierna för

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \{|t|\} + \{t\}, \text{ då } -1 < t < 1.$$

Men då gäller det att välja $L, h$ och $\alpha$ rätt!

---

## 4) Lösning

---

a) Enligt teorien vet vi att faltning i tid transformeras till produkten av faktorernas transform. I vårt fall leder det till

$$\mathrm{e}^{-3|t-4|} \star \mathrm{e}^{2jt} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{6\mathrm{e}^{-j4\omega}}{9+\omega^2} \cdot 2\pi\delta(\omega - 2) \tag{16}$$

som ger svaret

$$\boxed{X(\omega) = \frac{12\pi\,\mathrm{e}^{-j8}}{13}\,\delta(\omega - 2)}$$

b) Tabellslagning ger nu snabbt tidsfunktionen

$$\boxed{x(t) = \frac{6\,\mathrm{e}^{j2(t-4)}}{13}}$$

## 5) Lösning

$\mathscr{L}$-transformen av den givna ODE leder till

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + 2Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s\pi}}{s} + 3\,\mathrm{e}^{-2s\pi} \tag{17}$$

Insättning av begynnelsevärden ger

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) - s - 2 = \frac{\mathrm{e}^{-s\pi}}{s} + 3\,\mathrm{e}^{-2s\pi} \tag{18}$$

Alltså

$$Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s\pi}}{s((s+1)^2+1)} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-2s\pi}}{(s+1)^2+1} + \frac{s+2}{(s+1)^2+1} \tag{19}$$

och nu ger BETA, resp FS(rosa)

$$\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \sin t, \qquad \frac{1}{(s+1)^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \mathrm{e}^{-t}\sin t \tag{20}$$

$$\frac{s+1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \cos t + \sin t, \quad \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t) \tag{21}$$

$$\frac{1}{s((s+1)^2+1)} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t)\right], \ \text{se}'\text{rosa}'\,\text{FS}, \text{sid}12(5.34) \tag{22}$$

$$\mathrm{e}^{-Ts}F(s) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} f(t-T)\mathcal{U}(t-T) = \begin{cases} f(t-T), & t > T \geqq 0; \\ 0, & t < T. \end{cases} \tag{23}$$

Insättning av dessa samband i ekv(19) resulterar i svaret

$$\boxed{\begin{aligned} y = \frac{1}{2}\mathcal{U}(t-\pi)\left[1 - \mathrm{e}^{-(t-\pi)}(\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi))\right] \\ + 3\mathcal{U}(t-2\pi)\mathrm{e}^{-(t-2\pi)}\sin(t-2\pi) + \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t)\mathcal{U}(t) \end{aligned}}$$

## 6) Lösning

Det enklaste sättet att beräkna de intressanta frekvenserna är via Fourier-transformen av den samplade signalen:

$$X_s(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(X(f - f_1 + mf_s) + X(f - f_2 + mf_s)\right) \tag{24}$$

m a o fås de aktuella frekvenserna ur sambanden

$$|f| = |\pm f_{1,2} + mf_s| < 250\,\mathrm{Hz},\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{25}$$

med hänsyn tagen till rekonstruktionsfiltrets bandbredd.

I vårt fall gäller $f_1 = 300$ Hz och $f_2 = 900$ Hz och vi får:

$\pm 300 \mp 500 = \mp 200$, $\pm 900 \mp 2 \cdot 500 = \mp 100$ i Hz, som ger oss svaret:

$$\boxed{y(t) = 3\cos(400\pi t) + 2\sin(-200\pi t) = 3\cos(400\pi t) - 2\sin(200\pi t)}$$

---