SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2015-06-12

1) Lösning

a) Man ser omedelbart att differentialekvationen är separabel, så vi studerar

$$\frac{y'}{y^2} = \sin x \longrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \sin x dx \longrightarrow -\frac{1}{y} = -\cos x + C \tag{1}$$

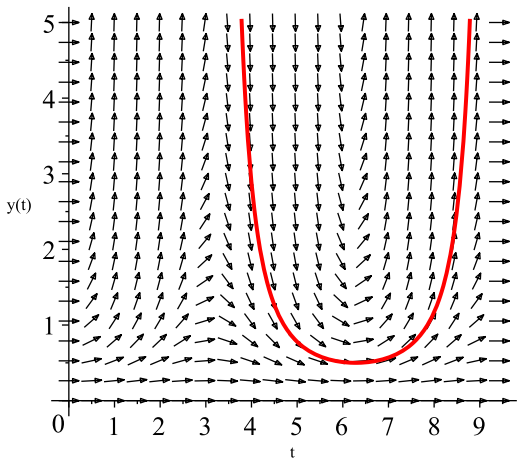
och det ger oss delsvaret:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\cos x - C}}$$

b) Med insatt begynnelsevärdet, $y(2\pi) = \frac{1}{2}$, får vi $\frac{1}{2} = \frac{1}{1-C}$, alltså $C = -1$. Vi har $1 + \cos x \neq 0$ och behöver ett delintervall innehållande $x = 2\pi$ och där $y(x)$ är kontinuerlig, alltså måste vi välja intervallet $\pi < x < 3\pi$, se Figur 1.

Det efterfrågade existensintervallet blir härmed $\boxed{\pi < x < 3\pi}$.

fig150612(1)



Figur 1: $y(x) = \frac{1}{1+\cos(x-2\pi)}$

2) Lösning

Vi använder metoden att 'reducera ekvationens ordning' genom att ansätta $z\mathrm{e}^x$, som leder till $y' = (z + z')\mathrm{e}^x$ och $y'' = (z + 2z' + z'')\mathrm{e}^x$.
Insättning av dessa samband i den gina ekvationen ger

$$\begin{aligned} x(z + 2z' + z'')\mathrm{e}^x - (x+1)(z + z')\mathrm{e}^x + z\mathrm{e}^x &= 0, && (2)\\ \Longrightarrow xz'' + (2x - x - 1)z' + \underbrace{(x - x - 1 + 1)}_{=0} z &= 0. && (3)\\ \Longrightarrow xz'' + (x-1)z' &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Eftersom $z' = 0$ leder till den givna lösningen e^x återstår att studera

$$\frac{z''}{z'} = \frac{1}{x} - 1 \Longrightarrow \ln|z'| = \ln x - x + C_1 \Longrightarrow z' = C_2 x \mathrm{e}^{-x}, C_2 = \mathrm{e}^{C_1} \tag{5}$$

ytterliggare en integration ger

$$z = \int C_2 x \mathrm{e}^{-x} dx = C_2(x+1)\mathrm{e}^{-x} + C_3 \tag{6}$$

d v s

$$y = e^x z = C_2(x+1) + C_3 e^x \tag{7}$$

Svar: $\boxed{y = A(x+1) + Be^x}$

---

3) Lösning

---

a) Egenvärden fås m h a sambanden:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3) = 0$$

som ger egenvärdena $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ som i sin tur leder till egenvektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\begin{bmatrix} -1+1 & 1 \\ 0 & -3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow 0\, v_{11} + v_{12} = 0, \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och p s s

$$\begin{bmatrix} -1+3 & 1 \\ 0 & -3+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow 2v_{21} + v_{22} = 0, \Longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss nu den allmänna lösningen i matrisform

$$\boxed{\mathbf{X}(t) = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-3t}}$$

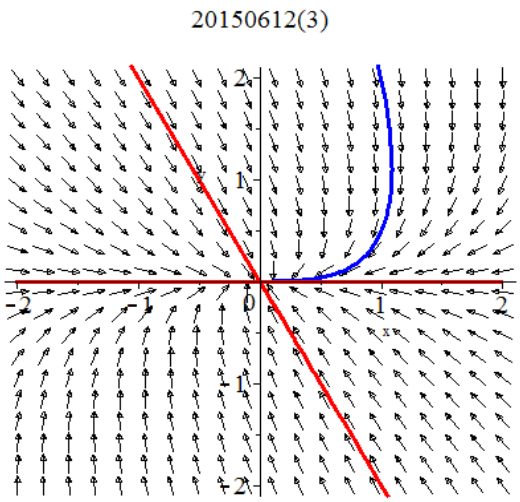
b) och med begynnelsevektorn $\mathbf{X}(0)$ får vi då

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

med lösningarna $a = 2$ och $b = -1$.

Det slutgiltiga svaret blir nu $\boxed{\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}}$

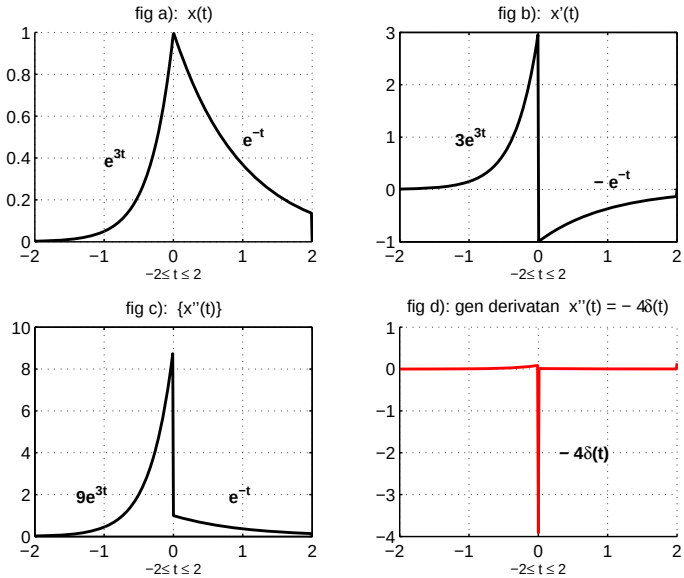
c) och fasporträttet är



Figur 2: $x' = -x + y, y' = -3y$

---

4) Lösning



Figur 3: $x(t), x'(t), x''(t)$

Derivering av $x(t)$, se figur a), ger snabbt

$$x'(t) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-t}, & t > 0; \\ 3\,\mathrm{e}^{3t}, & t < 0. \end{cases} \tag{8}$$

se figur b) och ytterliggare en derivering leder till

$$x''(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{e}^{-t}, & t > 0, \\ 9\,\mathrm{e}^{3t}, & t < 0, \end{array} \right\} - 4\delta(t) \tag{9}$$

se figur c) och d).
Det röda kurvdraget i figur d) representerar derivatan av språnget -4 i origo, m a o $-4\delta(t)$. Nu sammanfattar vi

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-t} \\ 9\,\mathrm{e}^{3t} - 6\mathrm{e}^{3t} - 3\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}}_{=0} -4\delta(t)$$

som resulterar i svaret

$$\boxed{f(t) = -4\delta(t)}$$

---

5) Lösning

---

a) Vi vet att systemets impulssvar $h(t)$ är derivatan av enhetssteg-svaret $s(t)$. Om vi använder Laplace transformen innebär det att $H(s) = sS(s)$, som leder till $Y(s) = H(s)X(s) = sS(s)X(s) \longrightarrow y(t)$ alltså

$$Y(s) = s\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)\frac{1}{s+2} = \cdots = \frac{1}{(s+2)^2} \tag{10}$$

Tabellslagning ger svaret

$$\boxed{y(t) = t\,\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{U}(t)}$$

b) Energi innehållet E_y i $y(t)$ är

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt = \int_{0}^{\infty} t^2\mathrm{e}^{-4t}d = \mathscr{L}\left[t^2\right](s=4) = \frac{2}{4^3} = \frac{1}{32} \tag{11}$$

Svar: $\boxed{E_y = \frac{1}{32} = 0,03125}$

---

6) Lösning

Det enklaste sättet att beräkna de intressanta frekvenserna är via Fourier-transformen av den samplade signalen:

$$X_s(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(X(f - mf_s)) \tag{12}$$

Vi vet att

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT) = x(t) \star \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \tag{13}$$

$$\longrightarrow Y(f) = X(f)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \tag{14}$$

a) Här har vi $T = \frac{1}{5}$[ms] vilket innebär $f_s = 5000$ Hz som leder till, se ekv(14),

$$Y(f) = 5000 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(5000n)\delta(f - n5000) \tag{15}$$

Texten ger vid handen att endast $X(n = 0)$ ligger i intervallet $|f| < 3$ kHz där $X(f) = 1$ m a o $Y(f) = 5000 \cdot 1 \cdot \delta(f)$. Inverstransformering ger svaret:

$$\boxed{y_a(t) = 5000}$$

b) Nu gäller $T = \frac{2}{5}$[ms] vilket innebär $f_s = 2500$ Hz som leder till, se ekv(14),

$$Y(f) = 2500 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(2500n\right) \delta\left(f - n2500\right) \tag{16}$$

som ger vid handen att endast $n = 0, \pm 1$ ger bidrag till $Y(f)$ då $|f| < 3$ kHz, alltså blir det aktuella $Y(f)$, med f i kHz!!!!, resp dess invers $y(t)$

$$\begin{aligned} Y(f) &= 2500 \left[X(0)\delta(f) + X\left(\frac{5}{2}\right) \delta\left(f - \frac{5}{2}\right) + X\left(-\frac{5}{2}\right) \delta\left(f + \frac{5}{2}\right) \right] && (17) \\ y(t) &= 2500 \cdot 1 \cdot \left(1 + \mathrm{e}^{i\pi 5000t} + \mathrm{e}^{-i\pi 5000t}\right) && (18) \end{aligned}$$

och svaret blir:

$$\boxed{y_b(t) = 2500\left(1 + 2\cos 5000\pi t\right)}$$