SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2016-01-07

1) Lösning

a) För $\cos x \neq 0$ får vi standardformen

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x}\, y = \cos x \tag{1}$$

Detta leder till den integrerande faktorn

$$p(x) = \frac{1}{\cos x} \tag{2}$$

som i sin tur ger sambandet

$$(py)' = p\cos x = 1 \Longrightarrow py = x + C_1 \tag{3}$$

Den allmänna lösningen blir nu

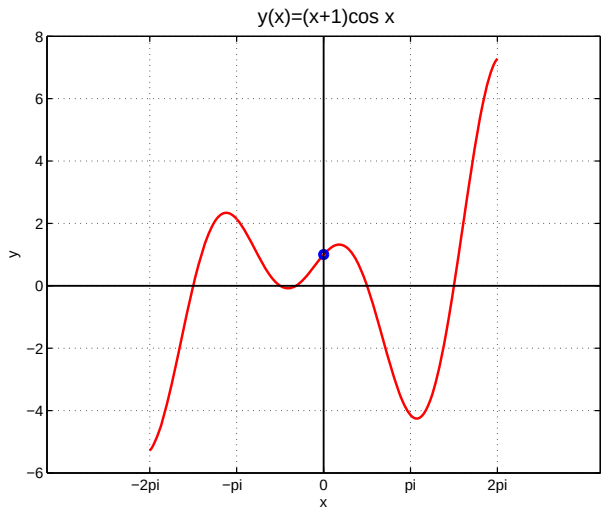
$$y = (x + C_1)\cos x \tag{4}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ resulterar då i svaret

$$\boxed{y(x) = (x+1)\cos x}$$

Obs: $\cos x = 0, x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ tillför inget nytt, se Figur 1.

b) Lösningskurvan ser ut som följer



Figur 1: $y(x) = (x+1)\cos(x)$

2) Lösning

a) För att visa att $y_1(t) = t$ och $y_2(t) = t^2$ är 2 lösningar sätter vi in dessa i DE, inga problem, OK?
För att visa att de är dessutom oberoende av varandra använder vi Wronski-determinanten:

$$\mathbf{W}[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2 \neq 0 \text{ för } t > 0 \tag{5}$$

alltså är $\{t, t^2\}$ en fundamentalmängd, v s v.

b) Detta problem löser vi m h a **Variation av parametrar** och börjar med att skriva DE på standardformen

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 4, \quad t > 0 \tag{6}$$

Därefter ansätter vi

$$y_p = u_1(t)t + u_2(t)t^2 \tag{7}$$

och deriverar y_p två gånger och sätter in i ODE'n. Enligt Z&C sid 158 får man då

$$y_1u_1' + y_2u_2' = tu_1' + t^2u_2' = 0 \tag{8}$$
$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = 1u_1' + 2tu_2' = f(t) = 4 \tag{9}$$

Detta system löser man t ex m h a Cramer's regel och vi kan uttrycka systemets lösningarna m h a determinanterna

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2, \quad \mathbf{W}_1 = \begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ f(t) & 2t \end{vmatrix} = -t^2 f(t), \quad \mathbf{W}_2 = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & f(t) \end{vmatrix} = tf(t) \tag{10}$$

och erhåller

$$u_1' = \frac{\mathbf{W}_1}{\mathbf{W}} = -\frac{t^2 f(t)}{\mathbf{W}} \text{ och } u_2' = \frac{\mathbf{W}_2}{\mathbf{W}} = \frac{tf(t)}{\mathbf{W}} \tag{11}$$

Med insatt $f(t) = 4$, leder oss dessa samband snabbt till

$$u_1' = -\frac{4t^2}{t^2} = -4 \text{ och } u_2' = \frac{4t}{t^2} = \frac{4}{t} \tag{12}$$

En integration av resp samband i ekv(12) resulterar i

$$u_1 = -4t + C_1 \text{ och } u_2 = 4\ln t + C_2 \tag{13}$$

där integrationskonstanterna C_1, C_2 är ointressanta i sammanhanget.

Svaret blir härmed

$$\boxed{y_p(t) = -4t^2 + 4t^2 \ln t}$$

3) Lösning

a) Egenvärden fås m h a sambanden:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0$$

som ger de dubbla egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ som i sin tur leder till de associerade egenvektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

Vi vet att 2 linjärt oberoende lösningar kommer att ha formen

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}_1, \;\; \mathbf{X}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}[t\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2] \tag{14}$$

b) så vi börjar som vanligt med att bestämma $\mathbf{v}_1$

$$\lambda = 1\text{:} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

c) Vektorn $\mathbf{v}_2$ bestämmer vi m h a ansatsen

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

som leder till $v_{21} - 2v_{22} = 1$ och väljer t ex $v_{22} = 0$ och erhåller $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Sammantaget erhåller vi nu de efterfrågade lösningarna

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{X}_2(t) = \mathrm{e}^t \left[t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t \end{bmatrix} \tag{17}$$

Härmed blir den allmänna lösningen

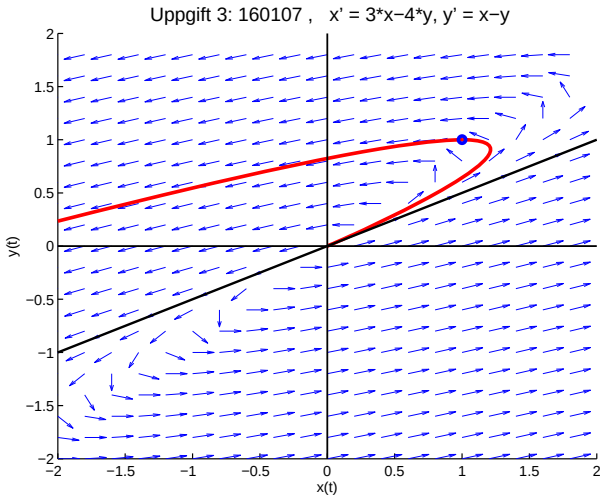
$$\boxed{\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t) = c_1\mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t \end{bmatrix}}$$

d) Insättning av de givna begynnelsevillkoren $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ ger snabbt

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow c_1 = 1,\; c_2 = -1 \tag{18}$$

och vi får svaret, se ekv(17)

$$\boxed{\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} +1-2t \\ 1-t \end{bmatrix}}$$



Figur 2: $x_1' = 3x_1 - 4x_2, x_2' = x_1 - x_2$

---

4) Lösning

Problemställningen är upplagd för att använda Parsevals relation, se rosa/lila formelsamlingen sid8(4.15)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df \tag{19}$$

där y^*, Y^* betyder konjugering av storheterna. Om vi väljer $e^{i\pi t}\text{sinc}(t) = x(t)$ och $\dfrac{1}{1+4\pi^2t^2} = y(t)$ så får vi igen m h a rosa/lila formelsamlingen sid8,sid9
$X(f) = \text{rect}(f - \frac{1}{2})$ och $Y^*(f) = Y(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|f|}$ som resulterar i

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(f - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|f|}df \tag{20}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-f}df = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 0.32 \tag{21}$$

Detta leder oss nu till svaret

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t}\text{sinc}(t)}{1+4\pi^2t^2}\,dt = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 0.32}$$

---

5) Lösning

$\mathscr{L}$-transformering av den givna ODE leder till

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) + y(0) + \frac{5}{4}Y(s) = \frac{1}{s}(1 - \mathrm{e}^{-\pi s}) \tag{22}$$

Insättning av begynnelsevärden ger efter hyfsning

$$\left(s^2 + s + 5/4\right)Y(s) - s = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\pi s}}{s} \tag{23}$$

Alltså blir

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + s + 5/4} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\pi s}}{s(s^2 + s + 5/4)} \tag{24}$$

$$= \frac{(s + 1/2) - 1/2}{(s + 1/2)^2 + 1} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\pi s}}{s((s + 1/2)^2 + 1)} \tag{25}$$

Nu ger BETA och rosa formelsamling

$$\frac{(s + 1/2)}{(s + 1/2)^2 + 1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \mathrm{e}^{-t/2}\cos t \tag{26}$$

$$\frac{-1/2}{(s + 1/2)^2 + 1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t/2}\sin t \tag{27}$$

$$F(s) = \frac{1}{s((s + 1/2)^2 + 1)} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} 1 - \mathrm{e}^{-t/2}\left(\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right) = f(t) \tag{28}$$

$$\mathrm{e}^{-\pi s}F(s) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \begin{cases} f(t - \pi), & t > \pi; \\ 0, & t < \pi. \end{cases} \tag{29}$$

Insättning av dessa samband i ekv(25) resulterar i svaret

$$\boxed{y(t) = \left[\mathrm{e}^{-t/2}\left(\cos t - \tfrac{1}{2}\sin t\right) + f(t)\right]\mathcal{U}(t) - f(t - \pi)\mathcal{U}(t - \pi)}$$

6) Lösning

Lösningsgången är uppenbar den att först bestäms den generaliserade 2:a derivatan av $g(t)$. Därefter beräknar vi fourierkoefficienterna för $g(t)$ och i sista steget ansätter vi en fourierserie för $x(t)$ som är anpassad till just $g(t)$ enl b). Detta ger oss alltså slutligen svaret till c).

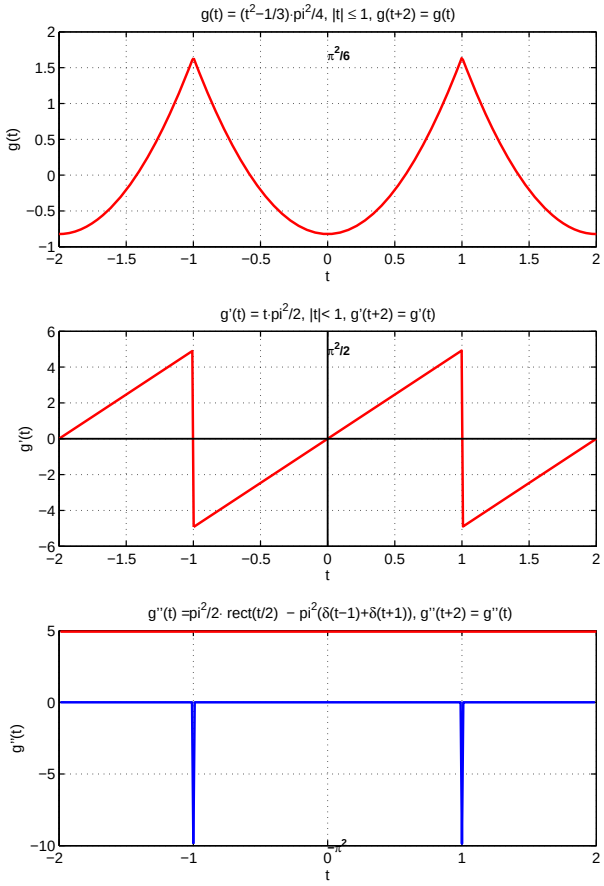
a) Enligt text gäller

$$g(t) = \frac{\pi^2}{4}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right), \ |t| \le 1 \ \text{ och } \ g(t) = g(t + 2) \ \text{ för } \ -\infty < t < \infty. \tag{30}$$

och derivatorna blir

$$g'(t) = \frac{\pi^2}{2}t, \quad |t| < 1 \tag{31}$$

$$g''(t) = \frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - \pi^2(\delta(t - 1) + \delta(t + 1)) \tag{32}$$



Figur 3: $g(t), g'(t), g''(t)$

b) Ide'n är nu att använda sambandet ekv(32) efter att ha deriverad en ansatt 2-periodisk fourierserie för $g(t)$.
Eftersom $g(t)$ är en jämn funktion ansätter vi

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi \tag{33}$$

där

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\pi^2}{4}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = \cdots = 0 \tag{34}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\pi^2}{4}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \cos n\pi t \, dt \tag{35}$$

Vi skall dock inte använda integralen i ekv(35) utan deriverar HL resp VL i ekv(33) och erhåller

$$g'(t) = \frac{\pi^2}{2} t = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n n\pi) \sin n\pi t, \quad |t| < 1 \tag{36}$$

$$g''(t) = \frac{\pi^2}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - \pi^2(\delta(t-1) + \delta(t+1)) \tag{37}$$

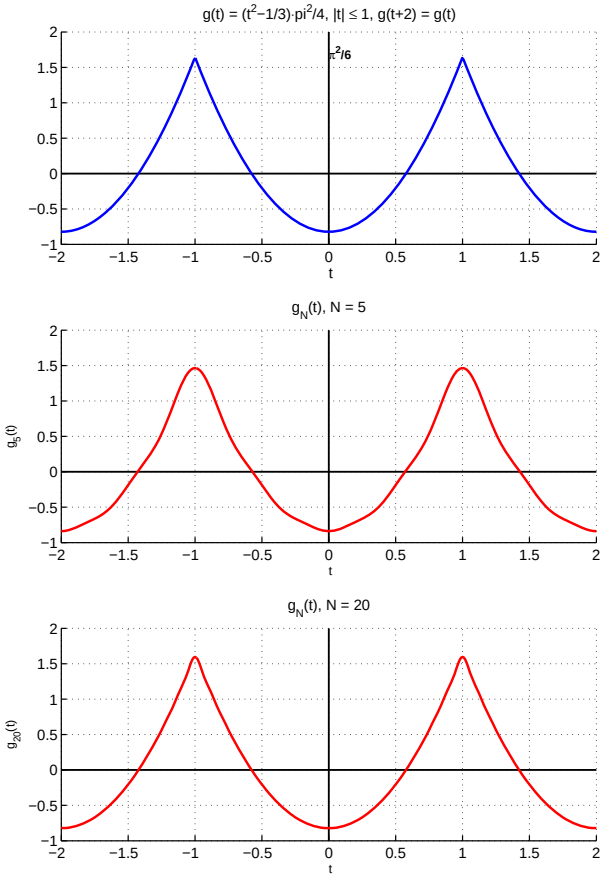
$$= \sum_{n=1}^{\infty} -a_n (n\pi)^2 \cos n\pi t = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n\pi t \tag{38}$$

Nu ser vi, se ekv(38), att

$$d_n = -a_n(n\pi)^2 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\pi^2}{2}\cos n\pi t\,dt + \int_{1-}^{1+} -\pi^2\delta(t-1)\cos n\pi t\,dt \quad (39)$$

$$= 0 - \pi^2\cos n\pi = -\pi^2(-1)^n \implies a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (40)$$

Härmed blir delsvaret $\boxed{g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi t}$



Figur 4: $g(t), g_N(t),\ N = 5, N = 20$

c) Nu ansätter vi för VL i den givna ODE

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi t, \quad (41)$$

deriverar 2 gånger under summatecknet, sätter in i den givna ODE i texten, $x''(t) + x(t) = g(t)$, och erhåller på det viset

$$\sum_{n=1}^{\infty} -A_n(n\pi)^2\cos n\pi t + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\pi t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi t \quad (42)$$

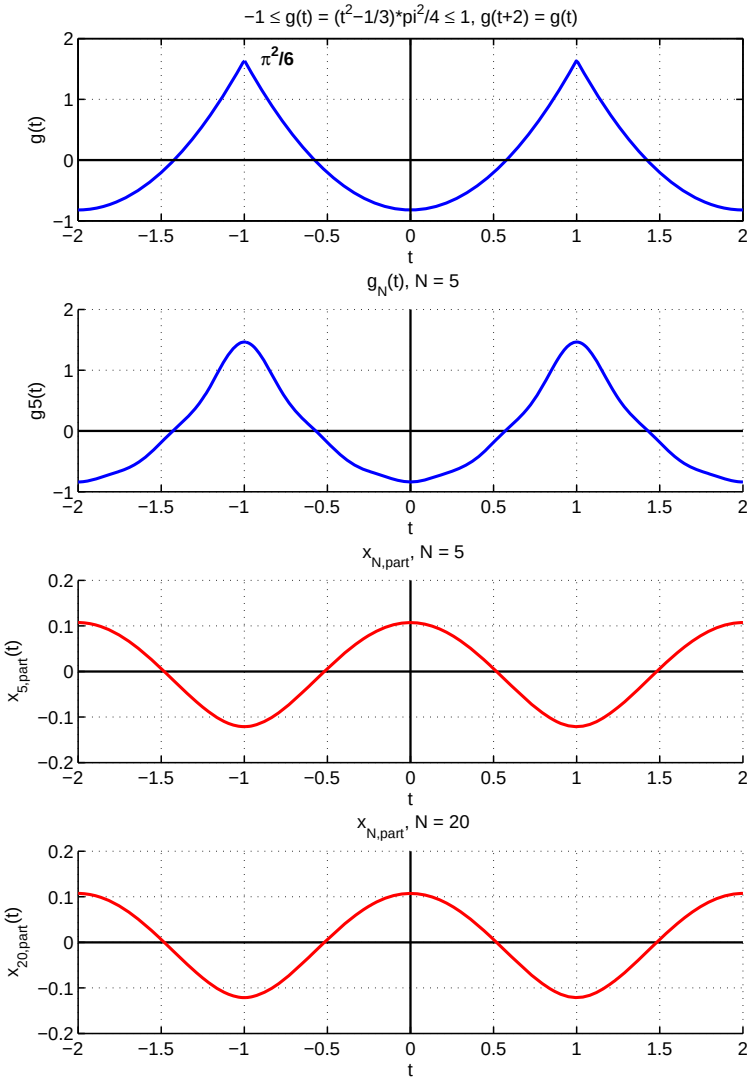
Först konstaterar vi att $\frac{A_0}{2} = 0$, sedan att sambandet(42) skall gälla för vilket

n och vilket t som helst, alltså kan vi ta bort summatecknen och därefter också $\cos n\pi t$. Återstår

$$-A_n(n\pi)^2 + A_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \implies A_n = \frac{(-1)^n}{n^2}\frac{1}{-(n\pi)^2+1} \tag{43}$$

Detta leder nu till det slutgiltiga svaret

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\frac{1}{-(n\pi)^2+1}\cos n\pi t}$$



Figur 5: $g(t), g_{\mathrm{N}}(t), x_{\mathrm{N,part}}(t),\ N = 5, N = 20$