

1) Lösning

a) Studera ODE'n på standardform, $t \neq 0$

$$\frac{dP}{dt} + \frac{3}{t}P = 4, \quad P(-1) = 0 \quad (1)$$

och använd integrerande faktorn

$$\mu(t) = e^{\int (3/t) dt} = e^{3 \ln|t|} = t^3, \text{ även för } t < 0$$

som leder till, se ekv(??),

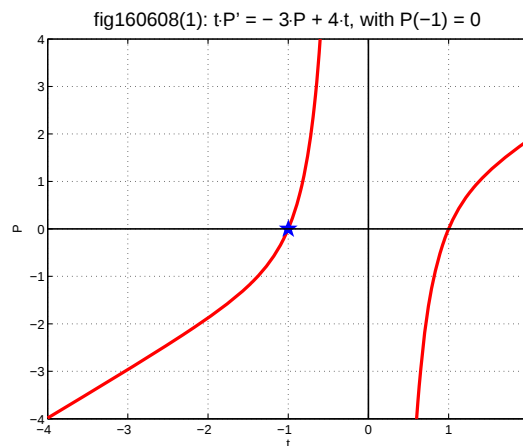
$$t^3 \frac{dP}{dt} + 3t^2 P = 4t^3 \implies \frac{d}{dt} [t^3 P] = 4t^3 \implies t^3 P = t^4 + C$$

Insättning av villkoret $P(-1) = 0$ ger $0 = (-1)^4 + C$, alltså $C = -1$

och vi får svaret

$$P(t) = t - t^{-3}$$

b) Existensintervallet är $-\infty < t < 0$



Figur 1: $P(t) = t - t^{-3}$, $P(-1) = 0$

2) Lösning

Vi börjar som vanligt med att skriva ODE'n på standardform

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = \frac{4}{x^2}, \quad x > 0 \quad (2)$$

Därefter ansätter vi

$$y(x) = z(x)y_1 = z(x)x^{-1} \implies y' = z'x^{-1} - zx^{-2} \implies y'' = z''x^{-1} - 2z'x^{-2} + 2zx^{-3}$$

Insättning i ekv(??) leder till

$$z''x^{-1} + 4z'x^{-2} = 4x^{-2} \implies z'' + \frac{4}{x}z' = \frac{4}{x} \quad (3)$$

som vi löser m h a den integrerande faktorn

$$p(x) = e^{\int (4/x)dx} = x^4 \implies (z'x^4)' = 4x^3 \quad (4)$$

och erhåller först

$$z'x^4 = \int 4x^3 dx = x^4 + C_1 \quad (5)$$

och efter hyfsning och integration

$$z = \dots = x - \frac{C_1}{3x^3} + C_2 \quad (6)$$

Detta resulterar i den allmänna lösningen

$$y_{\text{allm}}(x) = 1 + \frac{C_3}{x^4} + \frac{C_2}{x} \quad \text{med} \quad C_3 = -\frac{C_1}{3}$$

Insättning av $y(1) = 1$, $y'(1) = -3$ leder till slut till svaret

$$y(x) = 1 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x}$$

3) Lösning

a) Omskrivningen av systemet till matrisform ger

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \implies p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0 \quad (7)$$

Egenvärden representeras av dubbelroten $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$

och de associerade egenvektorererna betecknas med $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Då vet vi att 2 linjärt oberoende lösningar kommer att ha formen

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{X}_2(t) = e^{\lambda t} [t \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2] \quad (8)$$

Vi börjar som vanligt med att bestämma $\mathbf{v}_1$

i)

$$\lambda = 2: \implies \begin{bmatrix} 2 - 2 & 1 \\ 0 & 2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ii) Vektorn $\mathbf{v}_2$ bestämmer vi m h a ansatsen

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

och väljer t ex $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sammantaget erhåller vi nu de efterfrågade lösningarna

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{X}_2(t) = e^{2t} \left[t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- b) Insättning av detta svar i ekv(??) och vetskapen att systemets allmänna lösning har utseendet

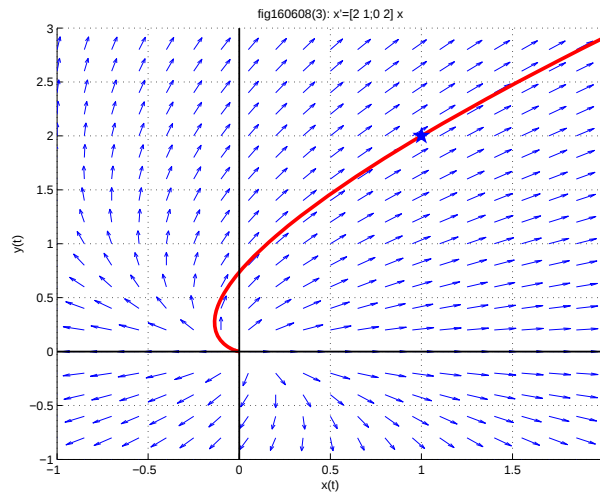
$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{X}_1(t) + c_2 \mathbf{X}_2(t) \implies \mathbf{X}(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

samt med de givna villkoren $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = 2$ får vi snabbt

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 e^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies c_1 = -e^{-2}, c_2 = 2e^{-2} \quad (12)$$

och vi får svaret, se ekv(??)

$$\mathbf{X}(t) = -e^{2(t-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{2(t-1)} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$



Figur 2: $x'_1 = 2x_1 + x_2$, $x'_2 = 2x_2$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = 2$

- c) Här visas **metoden som bygger på BETA, avsnitt 9.3**, som ett antal tentander har använt. **OBS: Här gäller $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1(t) + \mathbf{X}_2(t)$!!!!**

$$\mathbf{X}_1 = C_1 e^{2t} (\mathbf{h}_1 + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{h}_1), \quad \mathbf{X}_2 = C_2 e^{2t} (\mathbf{h}_2 + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{h}_2) \quad (13)$$

med $\mathbf{h}_{1,2}$ två linjärt oberoende egenvektorer, korresponderande till $\lambda = 2$, som är lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{h}_{1,2} = \mathbf{0}$. Eftersom $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$ kan vi välja $\mathbf{h}_{1,2}$ efter behag, vilket ger de enklaste linjärt oberoende egenvektorer

$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ resp $\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta och en del av ekv(??) leder till

$$\mathbf{X}_1 = C_1 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \dots = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{X}_2 = C_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \dots = C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Återstår bestämningen av konstanterna C_1, C_2 m h a $x_1(1) = 1, x_2(1) = 2$.

$$\mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = C_1 e^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} C_1 + C_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \Rightarrow C_1 = -e^{-2}, C_2 = 2e^{-2}$$

Detta resulterar inte oväntat i svaret

$$\mathbf{X}(t) = -e^{2(t-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{2(t-1)} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

alltså samma som under b) ovan.

4) Lösning

Den absolut enklaste metoden är att tillsammans med ledningen och sambandet $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ dela upp $\cos^2 x$ och $\cos^3 x$ i sina deltoner, då får vi

$$f(x) = 1 + \cos x + (1 + \cos 2x) + \frac{3}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)$$

som också är den sökta fourierserien

$$f(x) = 2 + \frac{13}{4} \cos x + \cos 2x + \frac{3}{4} \cos 3x$$

Kommentar: Skulle man beräkna Fourier-koefficienterna på sedvanligt sätt får man naturligtvis att $a_n \equiv 0$ för alla $n \geq 4$.

5) Lösning

$\mathcal{L}$ -transformen av den givna ODE leder till

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s) = \frac{e^{-(\pi/2)s}}{s} + 3e^{-(3\pi/2)s} - \frac{e^{-(2\pi)s}}{s} \quad (16)$$

Insättning av begynnelsevärden ger

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{e^{-(\pi/2)s}}{s} + 3e^{-(3\pi/2)s} - \frac{e^{-(2\pi)s}}{s} \quad (17)$$

Alltså

$$Y(s) = \frac{e^{-(\pi/2)s}}{s(s^2 + 1)} + \frac{3e^{-(3\pi/2)s}}{s^2 + 1} - \frac{e^{-(2\pi)s}}{s(s^2 + 1)} \quad (18)$$

och nu ger BETA, resp FS(rosa)

$$\frac{1}{s^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t \quad (19)$$

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 - \cos t \quad (20)$$

$$e^{-Ts} F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{cases} f(t - T), & 0 \leq T < t; \\ 0, & t < T. \end{cases} \quad (21)$$

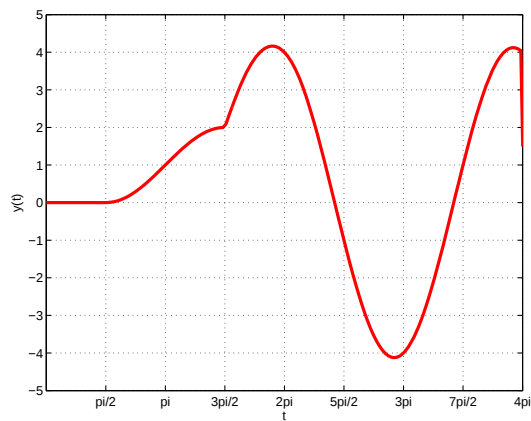
Insättning av dessa samband i ekv(??) resulterar i svaret

$$y = \mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \left[1 - \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 3\mathcal{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) - \mathcal{U}(t - 2\pi)(1 - \cos(t - 2\pi))$$

$$= \mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) (1 - \sin t) + 3\mathcal{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \cos t - \mathcal{U}(t - 2\pi)(1 - \cos t)$$

eller

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi/2; \\ 1 - \sin t, & \pi/2 \leq t < 3\pi/2; \\ 1 - \sin t + 3 \cos t, & 3\pi/2 \leq t < 2\pi; \\ 4 \cos t - \sin t, & 2\pi \leq t. \end{cases}$$



6) Lösning

Studera

$$x(t) = 3 \cos(2\pi(700 \pm n400)t + \pi/8) - 6 \sin(2\pi(750 \pm n400)t)$$

där $|f_0 \pm nf_s|$ skall vara mindre än $f_s/2 = 200$, alla f i Hz.

Detta ger oss i båda fallen att $n = \mp 2$ och leder till $f_{\cos} = 100\text{Hz}$ och $f_{\sin} = 50\text{Hz}$.

Vi får härmed resultatet

$$y_{\text{rek}}(t) = 3 \cos(2\pi 100t - \pi/8) + 6 \sin(2\pi 50t).$$