SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2016-12-19

---

1) Problemet löses m h a integrerande faktorn $\mu(x)$, men då måste DE'n skrivas först på standardformen

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{e^{2x}}{x^2} \tag{1}$$

efter division med x^2. Inga problem: $x > 0$ p g a begynnelsevillkoret! Då blir

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{3}{x} \longrightarrow \ln|\mu| = 3\ln|x| \Longrightarrow \mu(x) = x^3 \tag{2}$$

Detta leder till

$$(\mu y)' = \frac{x^3 e^{2x}}{x^2} = xe^{2x} \tag{3}$$

Integration, eller BETA, ger

$$\mu y = \int xe^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C \tag{4}$$

som resulterar i den allmänna lösningen

$$\boxed{y(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^3}\right) + \frac{C}{x^3}}$$

Insättning av begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger $0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^2 + C$ alltså $C = -\frac{e^2}{4}$ och slutsvaret blir

$$\boxed{y(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^3}\right) - \frac{e^2}{4x^3}}$$

Det största intervall som innehåller $x = 1$ är $x > 0$.

---

2) a) Vi skall studera

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[t^2x(t)] = j^2\frac{d^2}{d\omega^2}X(\omega) \quad \text{med} \quad x(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t) \tag{5}$$

Tabellslagning ger snabbt $X(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \Longrightarrow X''(\omega) = \frac{-2}{(1+j\omega)^3}$ samt insättning i ekv(5) och hyfsning ger svaret

$$\boxed{F(\omega) = \frac{2}{(1+j\omega)^3}}$$

b) För att bestämma I använder vi oss av Parseval's relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 dt \tag{6}$$

som i vårt problem blir

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\infty} \left|t^2 \mathrm{e}^{-t}\right|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2}{(1+j\omega)^3}\right|^2 d\omega && (7) \\ \Longrightarrow \int_{x=0}^{\infty} t^4 \mathrm{e}^{-2t} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\, d\omega}{(1+\omega^2)^3} = \frac{2}{2\pi} 4\, I && (8) \end{aligned}$$

Tidsintegralen i ekv(8) slår vi upp i BETA, eller observera att denna integral är $\mathscr{L}$-transformen av t^4 för $s = 2$, hursomhelst ger sambanden i ekv(8): $\frac{4!}{2^5} = \frac{3}{4} = \frac{4}{\pi} I$.

Sammanfattningsvis får vi $I = \frac{\pi}{4}\frac{3}{4}$ som ger svaret $\boxed{I = \frac{3\pi}{16}}$

---

3) a) Egenvärden fås m h a sambanden:

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^2 + 1 = 0$$

som ger egenvärdena $\lambda_1 = +i, \lambda_2 = -i$ som i sin tur leder till egenvektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow -iv_{11} + v_{12} = 0, \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

som direkt ger $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^\star$ som faktiskt är ointressant i sammanhanget.

Detta ger oss först lösningen för $\mathbf{X}_1(t)$, som i sin tur leder till den homogena lösningen för $\mathbf{X}(t)$ ty

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \operatorname{Re}\{\mathbf{X}_1(t)\} + c_2 \operatorname{Im}\{\mathbf{X}_1(t)\} \tag{9}$$

Vi studerar $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{v}_1\, e^{\lambda_1 t}$ och får

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{it} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} (\cos t + i \sin t) && (10) \\ &= \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Detta resulterar i den homogena lösningen, se ekv(9)

$$\boxed{\mathbf{X}_h(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}}$$

b) För att få en partikulär lösning ansätter vi

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{11}$$

Insättning i den givna DE ger direkt

$$\mathbf{X}_p'(t) = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

som leder till $a = 0$, $b = -1$ m a o

$$\boxed{\mathbf{X}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

c) Sammanfattningsvis har vi härmed fått den allmänna lösningen

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

och med begynnelsevektorn $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ får vi då

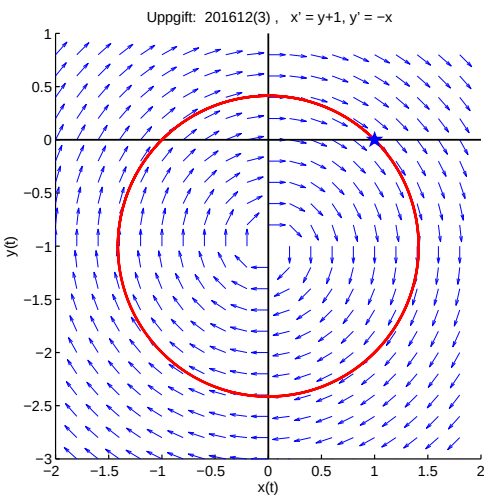
$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

med lösningarna $c_1 = c_2 = 1$.

Det slutgiltiga svaret blir nu

$$\boxed{\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ -\sin t + \cos t - 1 \end{bmatrix}}$$

d) som vi kan använda till att skissa fasporträttet:
Hint: Pricka in $\mathbf{X}(t)$ för $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.



Figur 1: $x' = y + 1, y' = -x$

Man kan också använda fasplans metoden, se Z&C, sid 385:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y+1} \tag{14}$$

som är en separabel DE med lösningen

$$1 - C = x^2 + (y+1)^2 \tag{15}$$

m a o en cirkel med centrum i $(0, -1)$ och radie $\sqrt{1-C}$.

---

4) a) För att visa att $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = x\mathrm{e}^x$ är 2 lösningar sätter vi in dessa i DE, inga problem, OK?
För att visa att de är dessutom oberoende av varandra använder vi Wronski-determinanten:

$$\mathbf{W}[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x\mathrm{e}^x \\ 1 & (1+x)\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = x^2\mathrm{e}^x \neq 0 \text{ för } x > 0 \tag{16}$$

alltså bildar $x, x\mathrm{e}^x$ en fundamentalmängd, v s v.

b) Detta problem löser vi m h a variation av parametrar, se kursboken sid 158, och börjar med att skriva DE på standardformen

$$y'' - \frac{1}{x}(x+2)y' + \frac{1}{x^2}(x+2)y = 2x, \quad x > 0 \tag{17}$$

Därefter ansätter vi

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = u_1(x)x + u_2(x)x\mathrm{e}^x \tag{18}$$

och deriverar y_p två gånger och sätter in i ODE'n. Enligt Z&C, 7th ed sid 158, får man då

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \quad \Longrightarrow \quad xu_1' + x\mathrm{e}^xu_2' = 0 \tag{19}$$
$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad 1u_1' + (1+x)\mathrm{e}^xu_2' = 2x \tag{20}$$

Detta system löser man t ex m h a Cramer's regel och vi kan uttrycka systemets lösningarna m h a determinanterna

$$\mathbf{W}_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\mathrm{e}^x \\ 2x & (1+x)\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = -2x^2\mathrm{e}^x, \qquad \mathbf{W}_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 \tag{21}$$

och erhåller, med $\mathbf{W}$ se ekv(16),

$$u_1' = \frac{\mathbf{W}_1}{\mathbf{W}} = -\frac{-2x^2\mathrm{e}^x}{x^2\mathrm{e}^x} = -2 \quad \text{och} \quad u_2' = \frac{\mathbf{W}_2}{\mathbf{W}} = \frac{2x^2}{x^2\mathrm{e}^x} = 2\mathrm{e}^{-x} \tag{22}$$

En integration av resp samband i ekv(22) resulterar i

$$u_1 = -2x + C_1 \quad \text{och} \quad u_2 = -2\mathrm{e}^{-x} + C_2 \tag{23}$$

där integrationskonstanterna C_1, C_2 är ointressanta i sammanhanget och sattes lika med noll. Ett första resultat blir härmed

$$\boxed{y_{part}(x) = -2x^2 - 2x}$$

men p g a att $-2x$ är en lösning till det homogena problemet kan vi förenkla partikulärlösningen till

$$\boxed{y_{part}(x) = -2x^2}$$

---

5) f är en jämn funktion; därför är $b_n = 0$ för alla $n = 1, 2, \ldots$.
Vi beräknar först

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{x=0}^{\pi}\left(\frac{4x^2}{\pi^2} + \cos x\right)dx = \cdots = \frac{4}{\pi^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3} \tag{24}$$

och sedan

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi}\left(\frac{4x^2}{\pi^2} + \cos x\right)\cos nx dx \tag{25}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi}\frac{4x^2}{\pi^2}\cos nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi}\cos x \cos nx dx = I_1 + I_2 \tag{26}$$

BETA ger oss

$$I_1 = \frac{8}{\pi^3 n^3}\left[-2\sin nx + 2nx\cos nx + (n\pi)^2 \sin nx\right]_0^{\pi} = \ldots = \frac{16(-1)^n}{(n\pi)^2} \tag{27}$$

$$I_2 = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ 1, & n = 1 \end{cases} \tag{28}$$

Alltså får vi

$$a_1 = 1 - \frac{16}{\pi^2}, \qquad a_n = \frac{16(-1)^n}{(n\pi)^2},\ n = 2, 3, \ldots. \tag{29}$$

Slutsvaret blir härmed

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{3} + \left(1 - \frac{16}{\pi^2}\right)\cos x + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.}$$

---

6) $\mathscr{L}$-transformen av den givna ODE leder till

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-(\pi/2)s}}{s} + 3\,\mathrm{e}^{-(3\pi/2)s} \tag{30}$$

Insättning av begynnelsevärden ger

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-(\pi/2)s}}{s} + 3\,\mathrm{e}^{-(3\pi/2)s} \tag{31}$$

Alltså

$$Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-(\pi/2)s}}{s(s^2+1)} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-(3\pi/2)s}}{s^2+1} \tag{32}$$

och nu ger BETA, resp FS(rosa)

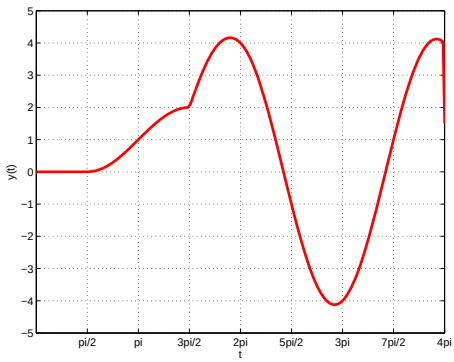
$$\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \sin t \tag{33}$$

$$\frac{1}{s(s^2+1)} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} 1 - \cos t \tag{34}$$

$$\mathrm{e}^{-Ts}F(s) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \begin{cases} f(t-T), & 0 \leq T < t; \\ 0, & t < T. \end{cases} \tag{35}$$

Insättning av dessa samband i ekv(32) resulterar i svaret

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left[1-\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] + 3\,\mathcal{U}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(t-\frac{3\pi}{2}\right) \\
&= \mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)(1-\sin t) + 3\,\mathcal{U}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\cos t.
\end{aligned}
$$

eller med styckvis definition

$$
y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi/2; \\ 1-\sin t, & \pi/2 \le t < 3\pi/2; \\ 1-\sin t + 3\cos t, & 3\pi/2 \le t \le 4\pi. \end{cases}
$$