SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2017-06-07

1) Lösning

a) Vi observerar att ekvationen är separabel och erhåller för $y \neq \pm 1$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{xdx}{1+x^2} + C_1 \tag{1}$$

Efter partialbråksuppdelning erhålles

$$\int -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] dy = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} + C_1 \tag{2}$$

eller

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 \tag{3}$$

Integrationskonstanten bestäms av villkoret $y(-1) = 3$ och vi får $C_1 = 0$. Exponering av ekv(3) och har löst ut y som funktion av x leder till svaret

$$\boxed{y(x) = 1 + \frac{2}{x^2}}$$

b) Vi ser att denna lösning är definierad för $x < 0$ och att $y > 1$ för alla $x \neq 0$ och satisfierar DE där, alltså blir existensintervallet $\boxed{x < 0}$.

2) Lösning

Vi börjar som vanligt med att skriva ODE'n på standardform

$$y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 8x^4, \tag{4}$$

Därefter ansätter vi, enligt teorien,

$$y(x) = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8x^4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\Longrightarrow u_1' = \frac{W_1}{W} \text{ och } u_2' = \frac{W_2}{W} \tag{6}$$

med

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^4 \\ 2x & 4x^3 \end{vmatrix} = 2x^5,\ W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^4 \\ 8x^4 & 4x^3 \end{vmatrix} = -8x^8,\ W_2 = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 8x^4 \end{vmatrix} = 8x^6 \tag{7}$$

Insättning i ekv(6) leder till

$$u_1' = \frac{-8x^8}{2x^5} = -4x^3 \Longrightarrow u_1 = -x^4 \text{och } u_2' = \frac{8x^6}{2x^5} = 4x \Longrightarrow u_2 = 2x^2 \tag{8}$$

Detta resulterar i den allmänna lösningen

$$y_{\text{allm}}(x) = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + c_1x^2 + c_2x^4 = x^6 + c_1x^2 + c_2x^4$$

Insättning av $y(1/2) = y'(1/2) = 0$ leder till $c_1 = \dfrac{1}{16}$, $c_2 = -\dfrac{1}{2}$ och svaret blir

$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{2} + x^6}$$

---

3) Lösning

---

i) Egenvärden fås m h a sambanden:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

som ger egenvärdena $\lambda_{1,2} = \pm i$, där $\lambda_1 = i$ leder i sin tur till

ii) egenvektorn $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow -v_{11} + v_{12}(1-i) = 0, \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix};$$

Detta resulterar i

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{it} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} (\cos t + i \sin t) \tag{9}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \tag{10}$$

iii) Från teorien vet vi att den allmänna lösningen fås via

$$\mathbf{X}_{\text{allm}}(t) = c_1 \mathrm{Re}\{\mathbf{X}_1(t)\} + c_2 \mathrm{Im}\{\mathbf{X}_1(t)\} \tag{11}$$

som i vårt fall, se ekv(10), ger svaret i matrisform

$$\boxed{\mathbf{X}_{\text{allm}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}$$

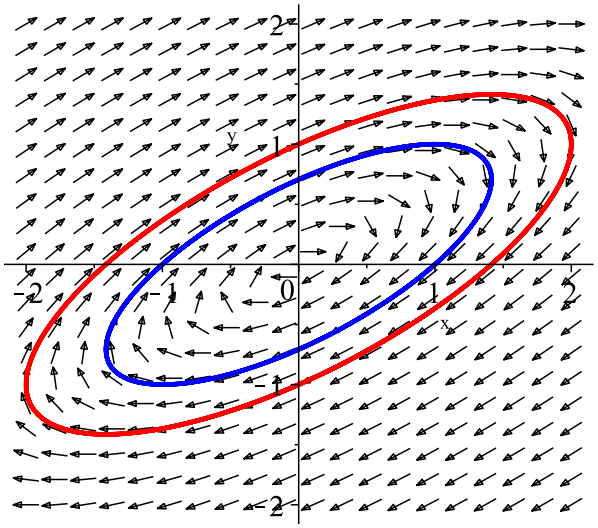
iv) Svaret ovan ger

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_1 = 0,\ c_2 = -1 \tag{12}$$

som leder till kurvan som är utritad blått i fasporträttet,

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \tag{13}$$

v) Eftersom våra 2 egenvärden är imaginära blir slutsatsen att origo är ett centrum.



Figur 1: $x' = -x + 2y, y' = -x + y$

4) Lösning

Vi löser problemet först m h a Fourier-transformen, den andra metoden är att använda sig av faltningen i tidsplanet, som vi tar därefter.
Metod I:
Vi vet att

$$y(t) = (x * h)(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} y(t) \tag{14}$$

alltså börjar vi med, se BETA,

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, \quad H(\omega) = \frac{2}{2+j\omega} - \frac{2}{1-j\omega} \tag{15}$$

$$Y(\omega) = \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)\left(\frac{2}{2+j\omega} - \frac{2}{1-j\omega}\right) \tag{16}$$

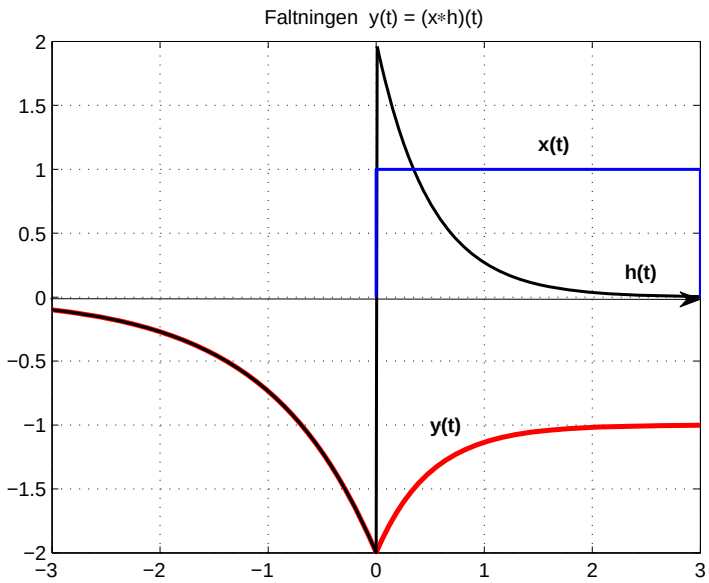
$$= \pi\delta(\omega)\left(\frac{2}{2+j\omega} - \frac{2}{1-j\omega}\right) + \left(\frac{1}{j\omega}\right)\left(\frac{2}{2+j\omega} - \frac{2}{1-j\omega}\right) \tag{17}$$

$$= -\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} - \frac{2}{1-j\omega} - \frac{1}{2+j\omega} \tag{18}$$

där vi använde partialbråksuppdelning m a p $j\omega$ på andra delen av sambandet (17)
Enkel tabellslagning i BETA ger svaret

$$\boxed{y(t) = -\mathcal{U}(t) - 2\mathrm{e}^t\mathcal{U}(-t) - e^{-2t}\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t)\left(-1 - e^{-2t}\right) - 2\mathrm{e}^t\mathcal{U}(-t)}$$

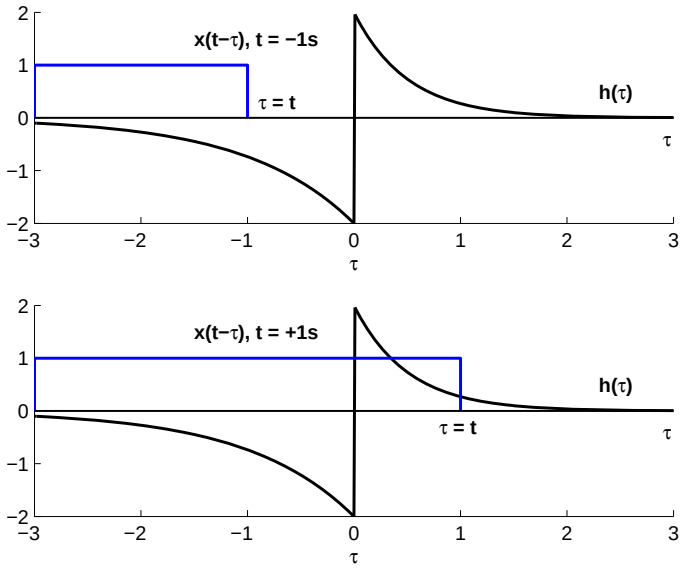
Figur 2 visar funktionerna $x(t), h(t)$ och $y(t) = (x * h)(t)$



Figur 2:

Metod II:
Här gäller det att studera faltningsintegralen

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{19}$$



Figur 3:

a) Steg 1: $y_1(t)$, $t < 0$: se Figur 3, övre

$$y_1 = \int_{-\infty}^{t<0} -2e^{\tau}d\tau = \cdots = -2e^{t} \tag{20}$$

b) Steg 2: $y_2(t)$, $t > 0$: se Figur 3, nedre

$$y_2 = \int_{-\infty}^{t>0} h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} -2e^{\tau}d\tau + \int_{0}^{t} 2e^{-2\tau}d\tau = \tag{21}$$

$$= \ldots = -2 + (1 - e^{-2t}) = -1 - e^{-2t} \tag{22}$$

som ger naturligtvis samma svar som i Metod I, röda linjen i figur 2.

5) Lösning

Vi observerar att det ingår $\mathrm{e}^{-4|\omega|}$ i det givna $F(\omega)$ och studerar därför

$$\mathrm{e}^{-4|\omega|} = X(\omega) \quad \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} \quad x(t) = \frac{4}{(4^2 + t^2)\pi}$$

$$\mathrm{e}^{j2\omega}\mathrm{e}^{-4|\omega|} = \mathrm{e}^{j2\omega}X(\omega) \quad \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} \quad x(t+2) = \frac{4}{(4^2 + (t+2)^2)\pi}$$

$$\omega\left(\mathrm{e}^{j2\omega}\,\mathrm{e}^{-4|\omega|}\right) \quad \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} \quad \frac{1}{j}\frac{d}{dt}x(t+2) = \frac{-4j}{\pi}\frac{2(t+2)}{(4^2 + (t+2)^2)^2}$$

som ger svaret

$$\boxed{f(t) = \frac{-8j}{\pi}\frac{(t+2)}{(4^2 + (t+2)^2)^2}}$$

6) Lösning

Eftersom funktionen $y(t)$ är 2π periodisk, m a o $\omega_0 = 2\pi/2\pi = 1$, kan den skrivas på formen

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) \tag{23}$$

Detta leder dels till

$$y(t+\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n(t+\pi)) + b_n\sin(n(t+\pi))) \tag{24}$$

och dels till

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin(nt) + nb_n\cos(nt)) \tag{25}$$

Eftersom $\cos(n(t+\pi)) = (-1)^n\cos(nt)$ och $\sin(n(t+\pi)) = (-1)^n\sin(nt)$ får vi

$$y(t+\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n a_n\cos(nt) + (-1)^n b_n\sin(nt)) \tag{26}$$

vilket resulterar i sambandet

$$y'(t) + y(t+\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\cos(nt)(nb_n + (-1)^n a_n) + \tag{27}$$

$$+\sin(nt)(-na_n + (-1)^n b_n)) \tag{28}$$

$$= \cos t, \qquad \text{enligt text.} \tag{29}$$

Här inser man att summan endast existerar för $n = 1$ och inget annat, alltså ger oss identifiering

$$a_0 = 0, b_1 - a_1 = 1, -a_1 - b_1 = 0, \text{ härmed blir : } \quad a_1 = -\frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{2}$$

Detta ger oss slutligen svaret

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}(-\cos t + \sin t)}$$