1 Planering

Kursen
- Föreläsningar
- övningar
- ~~Teoriövningar~~ Teoriövningar
- KSar
- Tenta

Kursen indelad i ~~två~~ 6 moduler

Modul		Tenta del 1
1	KS 1	Fråga 1
2	INL 1	2
3	KS 2	3
4	KS 3	4
5	KS 4	5
6	INL 2	6

klarar 5 moduler ⇒ ger D och tentan del 2

Tenta del 2
För C, B, A betyg

KLARAR 3 moduler

F

Klarar 4 ⇒ Ger E

<u>Veckolappar</u> – Kontorstid

<u>Kort frågor</u>

<u>önsketal</u>

lätt idag
svårare på onsdag

vecka 3-4 "Trial by fire!"

Vi börjar med ett räknetal.

Ex: Lös följande ekvation

$$e^x x^2 - 5x + 5e^x x + 6e^x - 6 - 5x = 0 \quad (1)$$

Svar: Första frågan är: vad ska vi göra.
Att lösa ekvation (1) innebär att hitta alla tal x så att likheten gäller.
Vi skriver om (1) som

$$e^x(x^2+5x+6) - (x^2+5x+6) = 0$$

Vilket är samma sak som

$$\underbrace{(x^2+5x+6)}_{a}\cdot\underbrace{(e^x-1)}_{b} = 0.$$

Sats! Axiom

$$\boxed{\text{Då } a\cdot b=0 \text{ om och endast om } a=0 \text{ och/eller } b=0 \text{ så får vi två fall}}$$

Fall 1: $x^2+5x+6=0$ (2)

Sats!

Enligt p.q formeln så ges lösningarna till (2) av

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-6} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

Så $x=-3$ och $x=-2$ är lösningar.

Fall 2. $e^x-1=0$ (3)

(3) har en lösning $x=0$.

Svar: Ekvationen har tre lösningar $x=-3$, $x=-2$ och $x=0$.

Observera: 1/ Vi förklarar våra beräkningar med ord.

2/ Vi bygger vårt resonemang på matematisk teori!

Sats 1 1 ~~Polynom~~ Låt p. och q vara reella tal och $\frac{p^2}{4}-q \geq 0$

då har

$$x^2+px+q=0 \qquad (3)$$

exakt följande lösningar

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

A Bevis: Vi ser att (3) är samma sak som

$$\underbrace{x^2+px+\frac{p^2}{4}}_{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

B

C Så $x^2+px+q=0$ om

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}-q \qquad (4)$$

D (4) gäller endast om

$$x+\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

vilken är väldefinierad om $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \geq 0$

dvs endast om $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

Vilket skulle bevisas.

Kommentarer: ~~Vi resonerar~~

Bevis är en väldigt strikt form av argumentering.
där vi använder

1) Enkla beräkningar (Axiom)
2) Definitionen
3) andra satser
4) Enkel logik

för att härleda vårt svar.

A) Vi använder ~~A~~ $a = a + b - b$

$$x^2+px+q = \underbrace{x^2+px+q}_{a} \underbrace{+\frac{p^2}{4}}_{+b} \underbrace{-\frac{p^2}{4}}_{-b}$$

B) $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = x^2+px+\frac{p^2}{4}$ enkel räkning

C) $\cancel{x^2+px+q} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \quad \frac{p^2}{4} + q$

$-\left(\frac{p^2}{4}+q\right)$

Eftersom $a+b=0$ omm $a+b-b=-b$

D) Sats: Låt $a \geq 0$ då $y^2 = a$ om och endast om

$y = \pm\sqrt{a}$ ~~och $a \geq 0$~~.

⋮

etc...

Olikheter:

Vi kommer inte att definiera olikheten stringent.

Men vi antar att alla vet vad

$3 > 2$ eller $0 \geq -4$ betyder.

Observera att "$>$" betyder strikt större än

men $\geq$ betyder större än eller lika med.

~~Exempel:~~

Räkneregler: $>$ och $\geq$ ~~[illegible]~~

har följande regler

Om

1) $a > b$ och $c > 0$ så $ac > bc$
2) $a > b$ och $c < 0$ så $ac < bc$
3) om $a > b$ så kommer $a + c > b + c$ för alla tal c

~~4) $ab > 0$ om $a > 0$ och $b > 0$ eller $a < 0$ och $b < 0$~~

men behandlas för övrigt som en $=$

Sats ~~Exempel~~

Om och endast om $x \in]-1, 2[$ så

~~För~~ vilken x gäller

$x^2 + 1 < 2x + 3$. ?

Bevis :
~~Svar~~: Enligt regel 3) så kommer

$$x^2+1 < \cancel{4}x+3 \quad \text{omm} \quad x^2+1-\cancel{4}x-3 < 0$$

dvs om $x^2-x-2 < 0$. (4)

Polynomet ekv. $x^2-x-2=0$ har lösningarna (enligt sats 2)

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

så $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ vilket lätt verifieras.

Dvs (4) gäller om och endast om

$(x+1)(x-2) < 0$

vilket enligt regel ~~1~~-~~2~~) gäller omm

Fall 1 $(x+1) > 0$ och $(x-2) < 0$

eller

Fall 2. $(x+1) < 0$ och $(x-2) > 0$

Fall 1: gäller om $x > -1$ och $x < 2$

dvs för alla $-1 < x < 2$

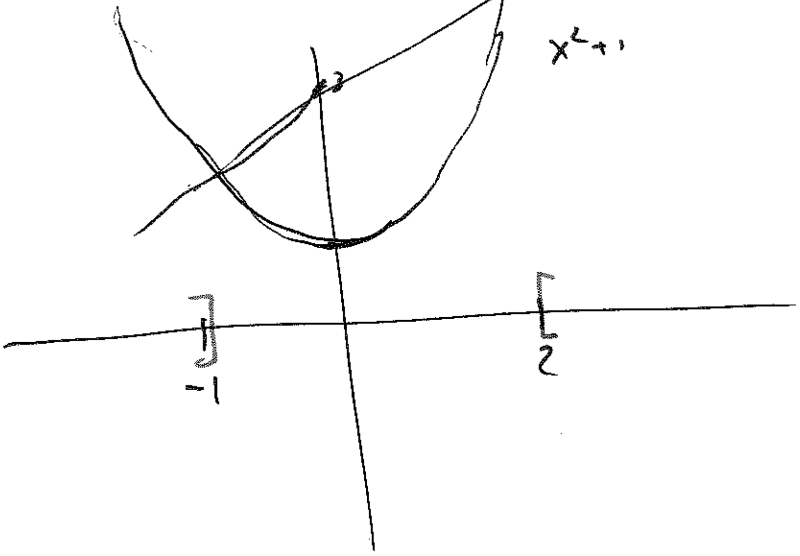
Fall 2 gäller om $x < -1$ och $x > 2$

~~dvs om $x < -1$~~ Vilket inte uppfylls av någon x

Svar! $x^2+1 > x+3$ om ~~$x < 2$ eller $x < -1$.~~

$-1 < x < 2$.

Svaret blev $x<2$ eller $x>-1$.



Vi har god anledning att namnge dessa intervall.

Definition: För $a, b \in \mathbb{R}$ ~~vi~~ kommer vi att benämna

$[a,b] = \{x;\ a \le x \le b\}$ det slutna intervallet $[a,b]$

$]a,b[= \{x;\ a < x < b\}$ det öppna —"— $]a,b[$

$[a,b[= \{x;\ a \le x < b\}$ —"—

$]a,b] = \{x;\ a < x \le b\}$

Så vi kunde ha svarat $]-1,2[$.

Funktioner:

Definition: En funktion från en mängd M till en mängd N är en regel som till varje objekt i M på ett <u>entydigt sätt</u> ordnar ett objekt i N.

Vi kallar M för ~~värdemängden~~ definitionsmängden D_f

Lat mängd N V_f

Väldigt abstrakt

Exempel: ~~x^2-1 är~~ $f(x) = x^2 - 1$ är en funktion från de reella talen till de reella talen.

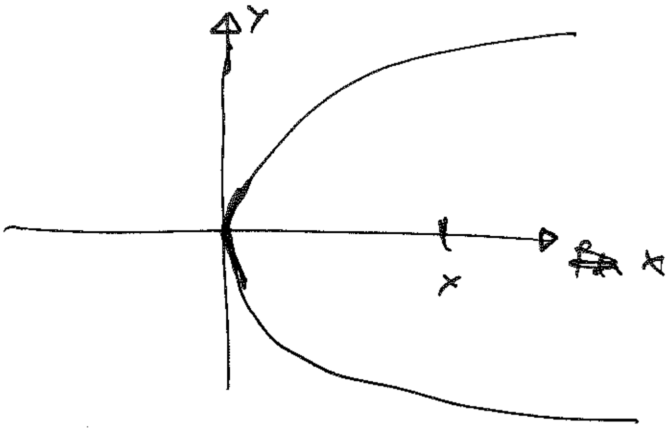
Ge mig ett tal, säg 2, så ger f entydigt talet $f(2) = 2^2 - 1 = 3$.

Exempel: $f(n) = 2^n$ från heltalen $\mathbb{Z}$ till $\mathbb{R}$.

Exempel (inte en funktion) ~~För varje tal $x \geq 0$~~

$f(x)$ definierad på $M = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$

$f(x) = \{\text{de tal } y \text{ i } \mathbb{R} \text{ så att } y^2 = x\}$



Saknar entydighet.

Observera att vi definierar funktioner abstrakt. Vilken regel som helst duger bara den är entydig.

Exempel: D_f = Alla trianglar

$f(T)$ = arean av T. $\quad V_f = \{x; x > 0\}$

Definition: Vi definierar absolutbeloppet

~~Exempel:~~

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

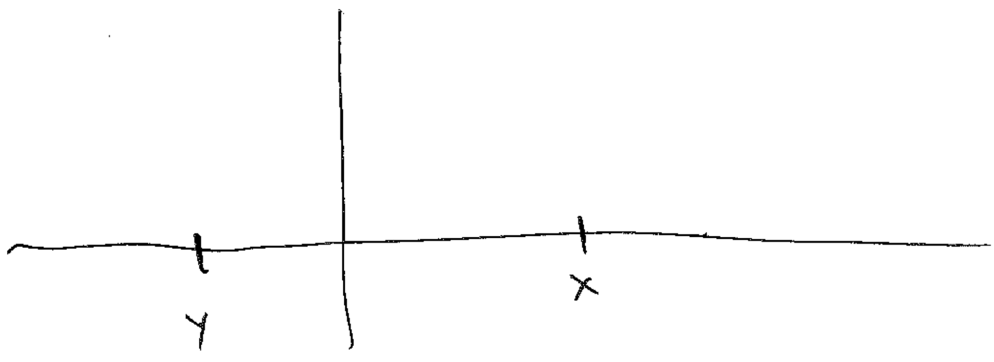
för alla $x \in \mathbb{R}$.

Väldigt viktigt. Absolutbeloppet

$|x-y|$ kan tolkas som avståndet

på den reella tallinjen från x till y.

Så $|x-y|$ har en geometrisk tolkning.



$D_{|x|} = \mathbb{R}$

$V_{|x|} = \{x ; x \in \mathbb{R} \text{ och } x \geq 0\}$

Exempel: ~~Ab~~ För vilka x gäller det att

$$|x-1| \geqslant \frac{1}{2}x+1 \quad ? \qquad (6)$$

Lösning: Eftersom vi använder absolut beloppet så måste vi gå till definitionen.
Enligt definition så är

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{om } x-1 \geq 0 \text{ dvs } x \geq 1 \\ -(x-1) = -x+1 & \text{om } x-1 < 0 \text{ dvs } x < 1 \end{cases}$$

Så vi får två fall

Fall 1 om $x \geq 1$ så

$$|x-1| = x-1 \geqslant \frac{1}{2}x+1 \quad \text{omm}$$

$$\frac{1}{2}x \geq 2 \implies x \geqslant 4.$$

Så om $x \geqslant 1$ och $x \geq 4$, dvs $\boxed{x \geq 4}$

Fall 2 om $x < 1$ så

$$|x-1| = 1-x \geq \frac{1}{2}x+1 \quad \text{omm}$$

$$0 \geqslant \frac{3}{2}x \quad \text{dvs om} \quad x \leq 0$$

Så (6) gäller om $x < 1$ och $x \leq 0$ dvs $\boxed{x \leq 0}$

Svar: $|x-1| \geq \frac{1}{2}x+1$ om $x \geqslant 4$ eller $x \leq 0$.

Vad jag vill få ut av föreläsningen

1/ Hur man skriver matte.
Räknetal är bevis! Använd ord.

2/ Något om bevis.

3/ Något om definitionen

4/ Olikheten

5/ Absolut belopp

Viktigt för resten av kursen.