F10

Igår ställde vi oss frågan vad är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^3)}{2k}$$

med ~~10^-7~~ ~~siffrors noggr.~~

fel på max 10^{-5}.

Def: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ om

$\lim_{j \to \infty} S_j = S$ där $S_j = \sum_{k=1}^{j} a_k$.

Då säger vi att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

Sats: Om $a_k \geq 0$ och $\sum_{k=1}^{j} a_k \leq M$ för alla j så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bevis: Vi måste visa att S_j konvergerar.
Det räcker att bevisa att S_j är växande och begränsad.

1) ~~Växande:~~ Begränsad: $S_j = \sum_{k=1}^{j} a_k \leq M$ per antagande

2) Växande $S_{j+1} - S_j = \sum_{k=1}^{j+1} a_k - \sum_{k=1}^{j} a_k =$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_j + a_{j+1} - (a_1 + a_2 + \dots + a_j) = a_{j+1} \geq 0 \quad \text{per antagande.}$$

Exempel. $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2+\sin(k)}{k(k+1)}}_{a_k}$ konvergerar.

(Hint: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$).

Lösning.
$$a_k = \frac{2+\sin(k)}{k(k+1)} \geq \frac{2-1}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

eftersom $\sin(k) \geq -1$.

Vidare så
$$a_k \leq \frac{3}{k(k+1)} = 3\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$ vilket ger

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 3 \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= 3\left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \dots - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 3$$

så a_k konvergerar enl. föregående sats.

~~Prata~~ Är satsen applicerbar på $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^3)}{2^k}$?

Vet inte om $\sin(k^3) \geq 0$ ...

Exempel. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^3)}{2^k}$ konvergerar.

Lösning. Vi betraktar a_k^+ och a_k^- där

$$a_k^{\pm} = \begin{cases} \pm \frac{\sin(k^3)}{2^k} & \text{om } \pm \frac{\sin(k^3)}{2^k} \geq 0 \\ 0 & \text{om } \pm \frac{\sin(k^3)}{2^k} \leq 0. \end{cases}$$

då $a_k^{\pm} \geq 0$ och, eftersom $|\sin(k^3)| \leq 1$

$$0 \leq \{a_k^{\pm}\} \leq \left| \frac{\sin(k^3)}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^k}$$

Så $\sum_{k=1}^{N} a_k^{\pm} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} = \cancel{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{N+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^N} < 1$

Så $\sum_{k=1}^{N} a_k^{\pm}$ är begränsade och växande. Alltså konvergenta. Men

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k^+ - \sum_{k=1}^{N} a_k^-$$ så, summaregeln

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k = \underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k^+}_{\text{existerar}} - \underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k^-}_{\text{existerar}}$$

Så $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim S_N$ existerar.

Följdsats. ~~1~~ Antag att

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergerar} \quad \left(\text{Def } \sum a_k \text{ är absolut konvergent}\right)$$

då konvergerar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Exempel. Vad är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^3)}{2^k}$, med

maximalt fel på 10^{-5}.

Lösning: Observera att för $M > N$

$$\left| \sum_{k=1}^{M} \frac{\sin(k^3)}{2^k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(k^3)}{2^k} \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\sin(k^3)}{2^k} \right| \leq \begin{Bmatrix} \text{triangel} \\ \text{och} \\ |\sin| \leq 1 \end{Bmatrix}$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} - \frac{1}{2^M}.$$

Låt $M \to \infty$, då $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \frac{\sin(k^3)}{2^k} = S$

Så

$$\left| S - \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(k^3)}{2^k} \right| \leq \lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{2^N} - \underbrace{\frac{1}{2^M}}_{\to 0} \right) = \frac{1}{2^N}$$

$\frac{1}{2^N} < 10^{-5}$ om $N > 5 \, {}^2\log 10 \approx 16.61$

Så det räcker att summera de 17 första termerna $\displaystyle\sum_{k=1}^{17} \frac{\sin(k^3)}{2^k} =$ DATOR.

Serier

1. $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ konvergent omm $|a|<1$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergent om $p>1$

Detta är allt vi vet om seriens konvergens

Satsen

1. Om $a_k \not\to 0$ så divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

2. Om $\sum |a_k|$ konvergerar så konvergerar $\sum a_k$

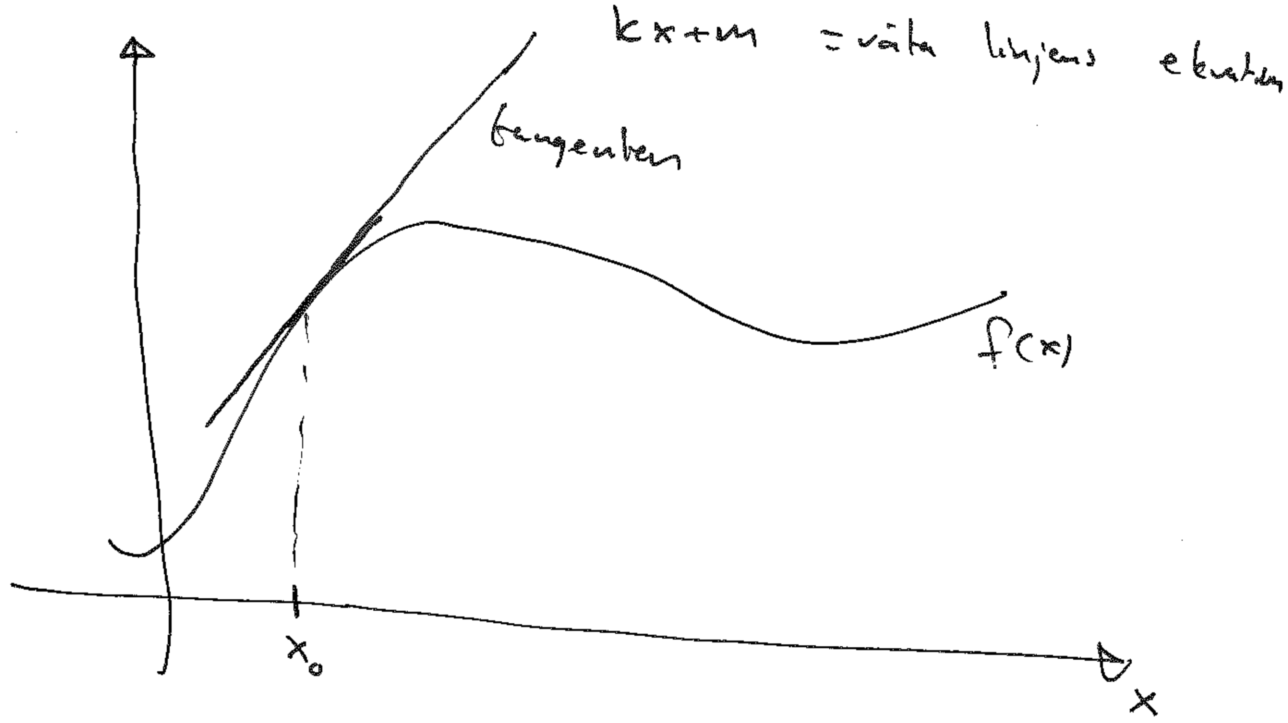
3. Om $a_k \geq 0$ och $\sum_{k=1}^{j} a_k$ begränsad oberoende av j så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

∯

Derivering

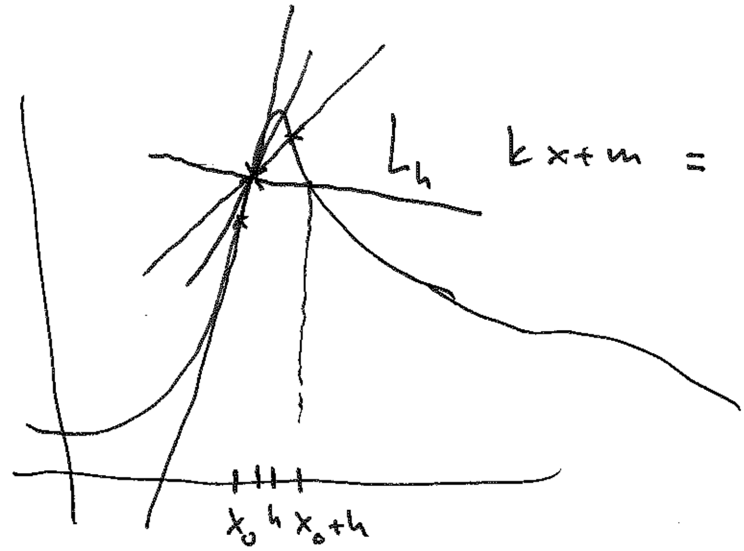
En av de viktigaste anledningarna att betrakta gränsvärden är derivatan.

~~Om vi betraktar~~



Derivatan är nära förknippad med tangenten till en funktion. Tangenten ~~är~~ till f i x_0 är "den linje som har samma lutning som grafen till f i x_0 och samma värde som f i x_0."

Hur definieras "lutning i en punkt?"



$$kx+m = \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{k}(x-x_0)+m$$

~~då~~ Observera att linjen blir en bättre och bättre approximation till kurvan.

Då $L_h(x_0) = \underbrace{\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)(x_0-x_0)}_{=0} + m = f(x_0)$

så måste $m = f(x_0)$.

Så tangenten borde ges av

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)+f(x_0).$$

Definition: Låt $f(x)$ vara en funktion definierad i en omgivning av x_0 då säger vi att $f(x)$ är deriverbar i x_0 om

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ existerar.

Då skriver vi $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

~~Exempel.~~ Nu har vi definierat derivatan.

1) Kan vi använda den för beräkningar?

2) Kan vi tolka den geometriskt? [senare]

1) Vi har ett antal elementära funktioner

$f(x)$	Derivatan f'	Bevis
x	1	$\frac{x+h-x}{h}=1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	har i princip gjort
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	likadant som för $\sin(x)$
e^x	e^x	har gjort $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	— " — $\frac{\ln(1+h)}{h}\to 1$
$\lvert x\rvert$	$\begin{cases} 1 & x>0 \\ \text{odef} & \\ -1 & x<0 \end{cases}$	har inte gjort för $x<0$

Vad kan vi göra med funktioner f, g

Operation	Deriveringsregel.	Bevis
$\pm$	$\frac{d\, f(x) \pm g(x)}{dx} = f'(x) + g'(x)$	Summa regeln
$\cdot$	$\frac{d\, f(x) g(x)}{dx} = f'(x)g(x) + f g'(x)$	Smart omskrivning och produkt regeln
$\div$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	Smart omskrivning och kvot regeln
$\circ$	$\frac{d\, f \circ g(x)}{dx} = \frac{d\, f(g(x))}{dx} = f'(g(x))g'(x)$	Sammansättningsregeln
f^{-1}	$\frac{d\, f^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ om $y = f(x)$	Lite knepigt.

That's it, det är det vi kan göra med funktioner. Så nu kan vi derivera alla sammansättningar av funktioner (om derivatan finns.)

1) Exempel. Hitta alla lösningar till

$$\cos\left(6\ {}^{3}\log(27^{x}) + \ln(e^{2}x)\right) = \frac{1}{2}$$

~~Så att ... x > 0~~ Förenkla ditt svar.

Svar: Vi vet att

$\cancel{\cos(a+b) = \cos(a)}$.

$$\cos(y) = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

Så

$$\underbrace{6\ {}^{3}\log(27^{x}) + \ln(e^{2}2^{x})} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

$${}^{3}\log(27^{x}) = \begin{Bmatrix} \log \\ \log \end{Bmatrix} = x\ {}^{3}\log 3^{3} = \begin{Bmatrix} \log \\ \log \end{Bmatrix} = 3x\ \underbrace{{}^{3}\log 3}_{=1}$$

$$\ln(e^{2}2^{x}) = \begin{Bmatrix} \log \\ \log \end{Bmatrix} = \ln(2^{x}) + \underbrace{\ln e^{2}}_{2} = x\ln(2) + 2\ln e = x\ln(2)+2$$

Så

$$18x + x\ln(2) + 2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Så

$$x = \frac{\pm\frac{\pi}{3} - 2}{18+\ln(2)} + \frac{2\pi n}{18+\ln(2)} \quad \text{för } n \in \mathbb{Z}$$

Exempel: Beräkna $\frac{d\arctan(y)}{dy}$.

Lösning: $\arctan = \tan^{-1}$ så om $\tan(x) = y$ så får vi

$$\frac{d\arctan(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{d\tan(x)}{dx}} \quad (1)$$

Men

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{f}{g}$ så enl. kvotregeln

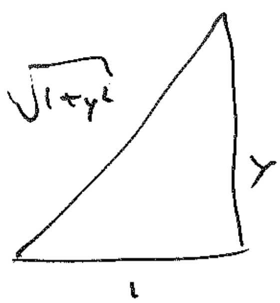
$$\frac{d\tan(x)}{dx} = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \left\{\begin{matrix}\text{trig}\\ \text{ettan}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad (2)$$

så (1) och (2) ger

$$\frac{d\arctan(y)}{dy} = \cos^2(x).$$

Men om $\tan(x) = y \Rightarrow x = \arctan(y)$

så blir $\cos(x) = \cos(\arctan y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$



så $\cos^2(x) = \frac{1}{1+y^2}$.

Svar $\frac{d\arctan y}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$

Tex $\dfrac{d\arcsin(\cancel{x}y)}{dy}$ då $\cancel{x}y = \frac{1}{2}$ Lösn

$\sin(x) = f(x) \Rightarrow \arcsin(y) = f^{-1}(y)$

Om $y = \frac{1}{2}$ och $x = \frac{\pi}{6}$ då $\sin(x) = y$

så enl. regel för f^{-1} får vi

$$\frac{d\arcsin(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{d\sin(x)}{dx}} = \left\{x = \frac{\pi}{6}\right\} = \frac{1}{\cos(\pi/6)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{d\ln(\cos(x))}{dx} = \left\{\begin{array}{l} \text{sammansättnings regeln} \\ D f(g) = f'(g)g' \\ \frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad \frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x) \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\tan(x).$$

etc...

Men vi behöver bevisa reglerna!

KS

Det viktigaste

1) Att kunna räkna med elementära funktioner

sin, cos, log, e^x, polynom etc.

2) Kunna räkna med gränsvärden

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^3+7} \quad \text{etc.}$$

3) Ha en förståelse av koncepten.

Vad är gränsvärden?

Vad betyder det för f att vara växande?

Vad är värdemängden.

2) kolla lösningsförslag ~~på~~ i instruktionen inför KS 1