Föreläsning 11.

Vi har ~~5~~ 6 standard derivator

$$\begin{cases} x \\ e^x \\ \ln(x) \\ \sin(x) \\ \cos(x) \\ |x| \end{cases}$$

5 deriveringsregler
$$\begin{cases} \pm & \text{plus/minus} \\ \cdot & \text{gånger} \\ \div & \text{division} \\ \circ & \text{sammansättning} \\ f^{-1} & \text{invers.} \end{cases}$$

Det är hela deriveringsteorin.

Vi kommer inte att bevisa alla på föreläsningarna - men ni ska kunna alla.

Idag: 1) $\dfrac{d\ln(x)}{dx}$

2) Bevisa produktregeln

3) Fokusera på koncept

4) Prata om den matematiska metoden

Sats. För $x > 0$ så $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$.

Bevis: $$\frac{d \ln(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \quad (1)$$

per definition.

Vi vet att $$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad (2)$$

så vi försöker skriva om (1) på något sätt så att vi kan använda (2). Det enda vi kan använda är logaritmlagar och gränsvärdeslagar!

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \left\{ \begin{array}{l} \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \\ \ln(a) - \ln(b) \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h/x} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{sätt} \\ y = \frac{h}{x} \end{array} \right\} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{x} \frac{\ln(1+y)}{y} = \left\{ \begin{array}{l} \text{enl.} \\ (2) \end{array} \right\} = \frac{1}{x}.$$

Sats: Om f och g är deriverbara ~~på~~ i punkten x, då

$$\frac{d\,(f(x)g(x))}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bevis: Vi ska beräkna

$$\frac{d\, f(x)g(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)g(x+h)}{h} + \frac{\big(g(x+h) - g(x)\big)f(x)}{h}\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{summa} \\ \text{och} \\ \text{produkt} \\ \text{regeln}\end{matrix}\right\} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{=f'(x)} \; \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{\substack{=g(x) \\ \text{då } g \text{ är} \\ \text{kontinuerlig}}} + f(x)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{=g'(x)}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$\blacksquare$

Kommentarer: Bevisen är enkla!

Nu har vi gjort den svåra teorin för gränsvärden så vi kan direkt tillämpa den för att beräkna derivator.

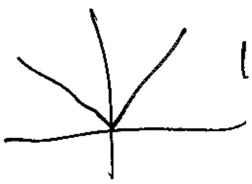
October 6, 2014

Kortfrågor: Den matematiska metoden.

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig i en punkt x^0. Följer det att f är deriverbar i x^0?

Nej!

Hitta motexempel



$|x| = f(x)$

Om $f \geq g$ följer det att $f' \geq g'$?

Nej,

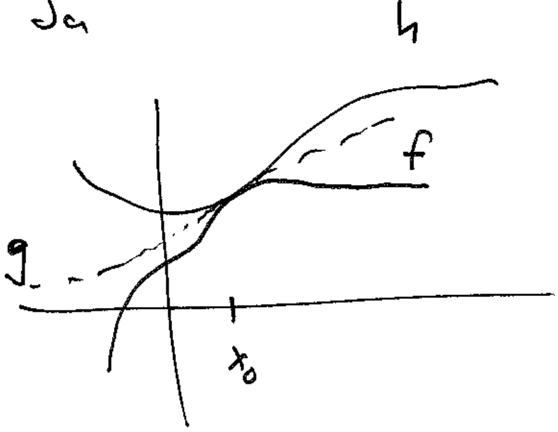
Tex

$e^{-x} \geqslant 0$

men $\frac{d e^{-x}}{dx} = -e^{-x} \not\geq 0$

Antag att $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $f(x_0) = h(x_0)$, $f'(x_0)$ och $h'(x_0)$ existerar. Kan vi dra slutsatsen att $g'(x_0)$ existerar?

Ja



Om $f'(x) > g'(x)$ för alla x följer det att $f(x) > g(x)$?

Nej.

Tex $f(x) = -e^{-x}$

~~f'(x)~~ $g(x) = 0$

Kan vi lägga till ett antagande?

Sats om derivata i extrempunkter.

Sats

Om funktionen $f(x)$ har ett lokalt extremvärde i en inre punkt x_0 av definitionsmängden och om $f(x)$ är deriverbar i x_0 så

$$f'(x_0) = 0.$$

1. Vad säger satsen?
2. Varför är den viktig?
3. Vilka antaganden gör vi? Är de nödvändiga?
4. Är satsen rimlig? Hur bevisas den?

1) Att inre extrempunkter, säg $\max f(x) = f(x_0)$, uppfyller ett ytligare villkor.
Det finns en relation mellan konceptet max/min och derivata

2) Absolut, vill vi hitta max/min så räcker det att leta punkter där $\frac{df(x)}{dx} = 0$, så vi får en ekvation som vi kan lösa. "Max" är ett oregerligt problem. Derivera och lösa ekvationer är vi bra på.

3) i) Deriverbar — annars är slutsatsen meningslös
ii) inre punkt, även randpunkter kan vara extrempunkter

Exempel. Låt $f(x)=(x^2-2)e^{x^2}$ på $[-2,3]$.
Hitta max på $[-2,3]$.

Lösning: Om x_0 är ett extremvärde så

1) är x_0 inte en inre punkt, dvs $x_0=-2$ eller $x_0=3$

ELLER

2) $f'(x_0)=0$

---

1) $f(-2) = 2e^4$

$f(3) = 7e^9$

2) ~~$f(x) =$~~ $f(x) = (x^2-2)\cdot e^{x^2}$

dvs f består av sammansatta och multipicerade elementära funktioner

$$\frac{d f(x)}{dx} = \left\{ \begin{matrix} \text{Produkt} \\ \text{regeln} \end{matrix} \right\} = \frac{d(x^2-2)}{dx} e^{x^2} + (x^2-2)\frac{d e^{x^2}}{dx} =$$

$$= 2x e^{x^2} + (x^2-2)\underbrace{\frac{d e^{x^2}}{dx}}_{\text{sammansatt}} = \left\{ \text{kedjeregeln} \right\} = 2xe^{x^2} + 2(x^2-2)xe^{x^2}$$

$g = e^x \quad h = x^2 \quad e^{x^2} = g(h(x))$

$= 2x\,(x^2-1)e^{x^2}$

så $f'(x)=0$ då $x=0$

eller $x=\pm 1$

Så vi har 3 möjliga maxvärden

$f(-1) = -e$

$f(0) = -2$

$f(1) = -e$

Så av alla möjliga maxvärden så är

$f(3) = 7e^9$ det maximala.

Exempel.

Tal

Låt $f(x) = (x^2 - 2)e^{x^2}$ vara definierad på $[-2, 3]$. Hitta maximala värdet av f på $[-2, 3]$?

1. Vad ska vi göra?
2. Vad vet vi om max/min värden (d.v.s. extremvärden)?
3. Det räcker alltså att hitta punkterna där $f'(x) = 0$...

1) Hitta en maxpunkt
2) Att de har derivatan =0
eller ligger på randen

Ett till exempel - fast omvänt.

Tal

Använd Maclaurinpolynom för att beräkna $\sin\left(\frac{1}{5}\right)$ *med tre siffrors noggrannhet.*

Kan du lösa talet?

Varför inte?

1) Förmodligen inte
2) Vi vet inte
vad Maclaurinpolynom
betyder

Definition

Låt $f(x)$ vara n gånger kontinuerligt deriverbar i $x = 0$. Då säger vi att

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

är Maclaurinpolynomet av ordning n till $f(x)$.

Exempel: Maclaurinpolynomet av ordning 4 till $\sin(x)$ är

$$\sin(0) + \frac{\cos(0)}{1}x + \frac{-\sin(0)}{2}x^2 + \frac{-\cos(0)}{6}x^3 + \frac{\sin(0)}{24}x^4 =$$

$$= x - \frac{x^3}{6}.$$

Förklara

Vad gör vi nu?

Kan vi lösa talet?

Vi behöver en sats som talar om hur man räknar på talet!!!

Så gå tillbaka till boken och leta efter en sats som säger något om hur man räknar med Maclaurinpolynom.

1) ?

2) Hitta en sats!

Sats

Låt $f(x)$ vara $n+1$ gånger kontinuerligt deriverbar på $[-1,1]$ och $p_n(x)$ vara Maclaurinpolynomet av ordning n till $f(x)$. Då

$$f(x) = p_n(x) + R(x)$$

där $|R(x)| \leq \frac{\sup_{[0,x]} |f^{n+1}|}{(n+1)!} |x|^{n+1}$.

Varför är satsen viktig?

Kan den hjälpa oss att lösa talet?

Satsen säger att $|f(x) - p_n(x)| \leq |R(x)| \leq \frac{\sup_{[0,x]} |f^{n+1}|}{(n+1)!} |x|^{n+1}$.

1) Vänsterledet ($f(x)$) kan vara väldigt knepigt. Men p_n är ~~vi vet~~ ett polynom, dvs den snällaste typen av funktioner.

Vi vet även hur man beräknar $P_n(x)$, eftersom vi vet hur man deriverar knepiga funktioner.

Så satsen säger att vi kan skriva en svår funktion $f(x)$ som en enkel funktion + ett litet fel och även har vi uppskattat felet

Lösning:

$$\left| \sin\left(\frac{1}{5}\right) - \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6\cdot 5^3}\right)}_{P_4\left(\frac{1}{5}\right)} \right| \leq \frac{\max \left| \frac{d^5 \sin(x)}{dx^5} \right|}{5!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\underbrace{120}_{\geq 100}} \cdot \frac{1}{\underbrace{(25\cdot 25)}_{625\cdot 5 \geq 3000}\cdot 5} \leq \frac{1}{3\cdot 10^5}$$

Så $\sin\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6\cdot 5^3}$ med tre siffrors noggrannhet