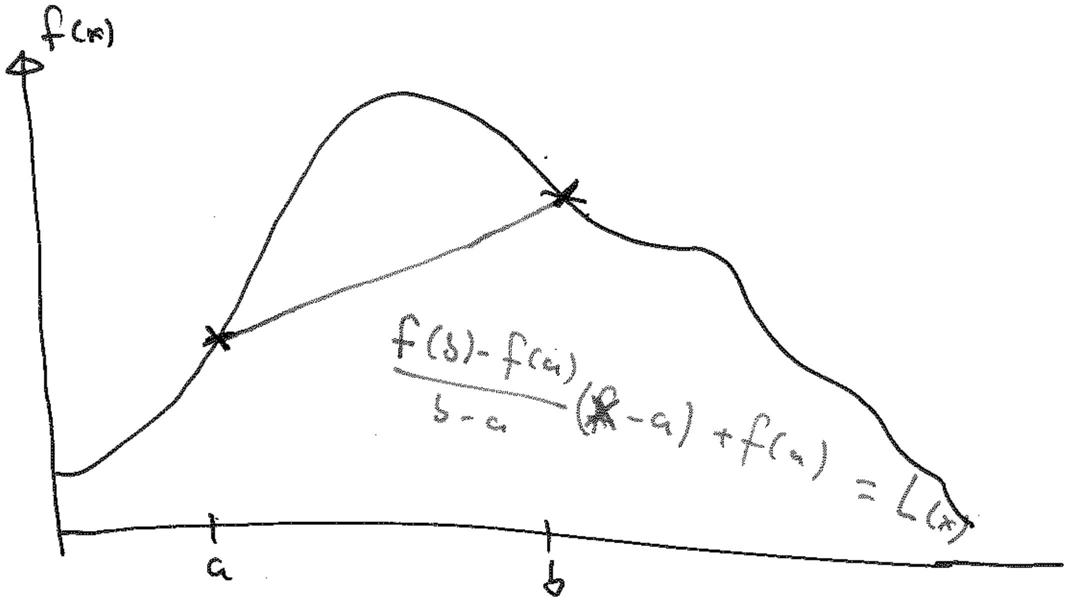
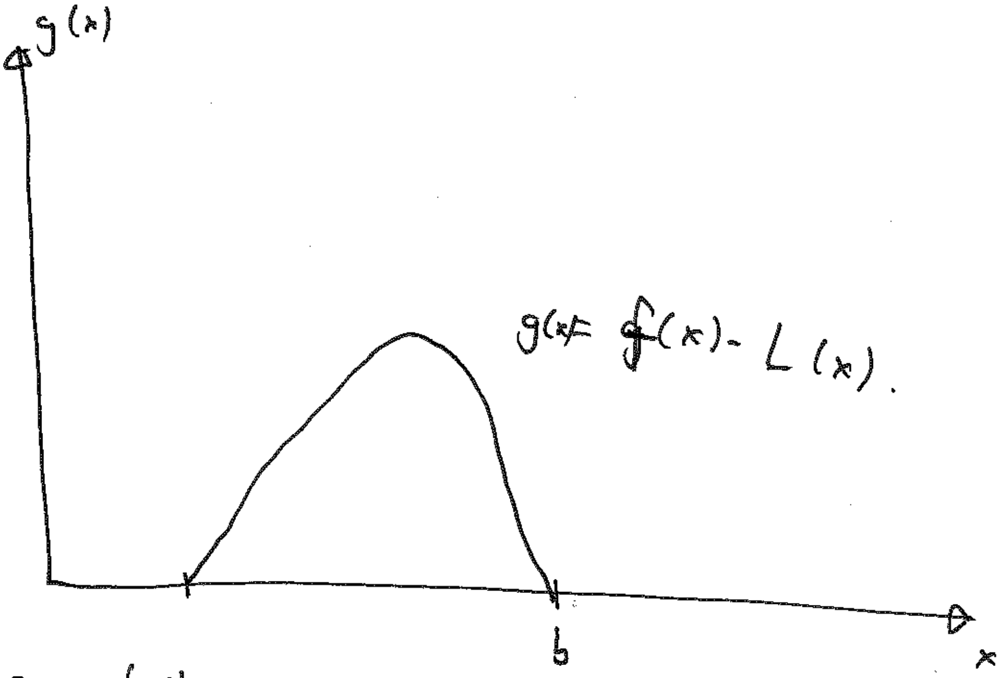
Medelvärdessatsen





Tre fall

1) $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = L(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

2) $g(x) > 0$ för något x. $\Rightarrow g(x)$ antar ett maxvärde > 0 i någon punkt ξ_0 eftersom g är deriverbar och därför kontinuerlig på $[a,b]$ som är slutet och begränsat.

Observera att $g(a) = g(b) = 0$ så $\xi \in]a,b[$ så $g'(\xi) = 0$ enl föregående sats $\Rightarrow f'(\xi) = L'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Exempel: Om $|f'(x)|$ är begränsad på $\mathbb{R}$,

säg $|f'(x)| \le M$ för alla x och $f(0)=0$

då $|f(x)| \le M|x|$. ~~för $x > 0$~~

Lösning: Om $x > 0$ så finns det ett $\xi \in]0,x[$ så att

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi)$$

$$|f(x)| = |f'(\xi)\, x| \le Mx$$

Och om $x < 0$ så ,

$$\frac{\overset{0}{\cancel{f(0)}} - f(x)}{0-x} = f'(\xi)$$

$$\Rightarrow \quad |-f(x)| = |-x f'(\xi)| \le |x| M.$$

så $|f(x)| \le |x| M$ oavsett om $x \ge 0$ eller < 0.

$\blacksquare$

Sats f' existerar på $]a,b[$ $\Rightarrow$ ~~f~~ $f'(x) > 0$

$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

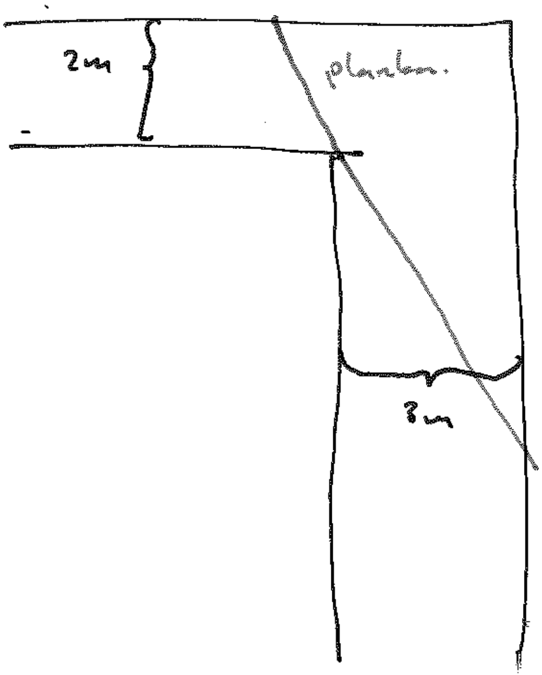
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi) \Rightarrow f(x)-f(y) = \underbrace{(x-y)}_{>0}\underbrace{f'(\xi)}_{>0} > 0.$$

Kan ni visa att:

Om $f(x)$ är deriverbar och strängt växande på $]a,b[$ så är $f'(x) \geq 0$.

Varför "$>$" i ena fallet och "$\geq$" i det andra?

Exempel. Optimering & grafritning

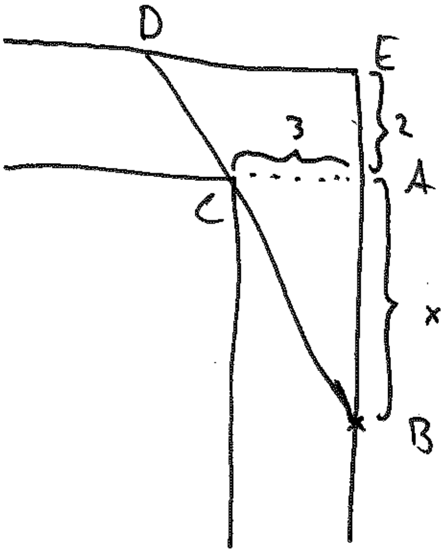


Låt två oändligt långa korridorer vara som i bilden till vänster.

Hur lång är den längsta plankan som kan bäras "runt hörnet".

"Plankan bärs horisontellt och är oändligt tunn och massa annat nonsens."

Lösning: Vi inför x enligt figuren.



$x = |AB|$. Då är

$\triangle BCA$ och $\triangle BDE$ likformiga

så

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BD|}{|BE|} \quad \text{dvs}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+3^2}}{x} = \frac{|BD|}{x+2} \Rightarrow |BD| = \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2+9}$$

Så planklängden från ~~BD~~ B till D är

$\frac{x+2}{x}\sqrt{x^2+9}$. Vi ska alltså hitta minimala

värdet av $l(x) = \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2+9}$ då $x > 0$.

1) Undersök randvärden

$$\lim_{x\to 0^+} l(x) \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{6}{x} = \infty$$

eftersom $\frac{x+2}{x}\sqrt{x^2+9} \geq \frac{6}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2+9} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\cancel{x}}\cancel{\sqrt{x^2}} = \infty.$$

2) Hitta inre extrempunkter. Enligt sats så är derivatan noll i inre extrempunkter

$$\frac{d\,l(x)}{dx} = \left\{\begin{matrix}\text{prod}\\ \text{regeln}\end{matrix}\right\} = \sqrt{x^2+9}\,\frac{d\frac{x+2}{x}}{dx} + \frac{x+2}{x}\,\frac{d\sqrt{x^2+9}}{dx} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{2\sqrt{x^2+9}}{x^2}$$

$$\frac{d\frac{x+2}{x}}{dx} = \left\{\begin{matrix}\text{kvot}\\ \text{regeln}\end{matrix}\right\} = \frac{x-(x+2)}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$$

$$\frac{d\sqrt{x^2+9}}{dx} = \left\{\text{kedjeregeln}\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\cdot\frac{d(x^2+9)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

Så $\frac{dl(x)}{dx} = \frac{x^3 + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} - 18}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

$\frac{dl(x)}{dx} = 0$ då $x^3 - 18 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{18}$.

~~eftersom minimum~~

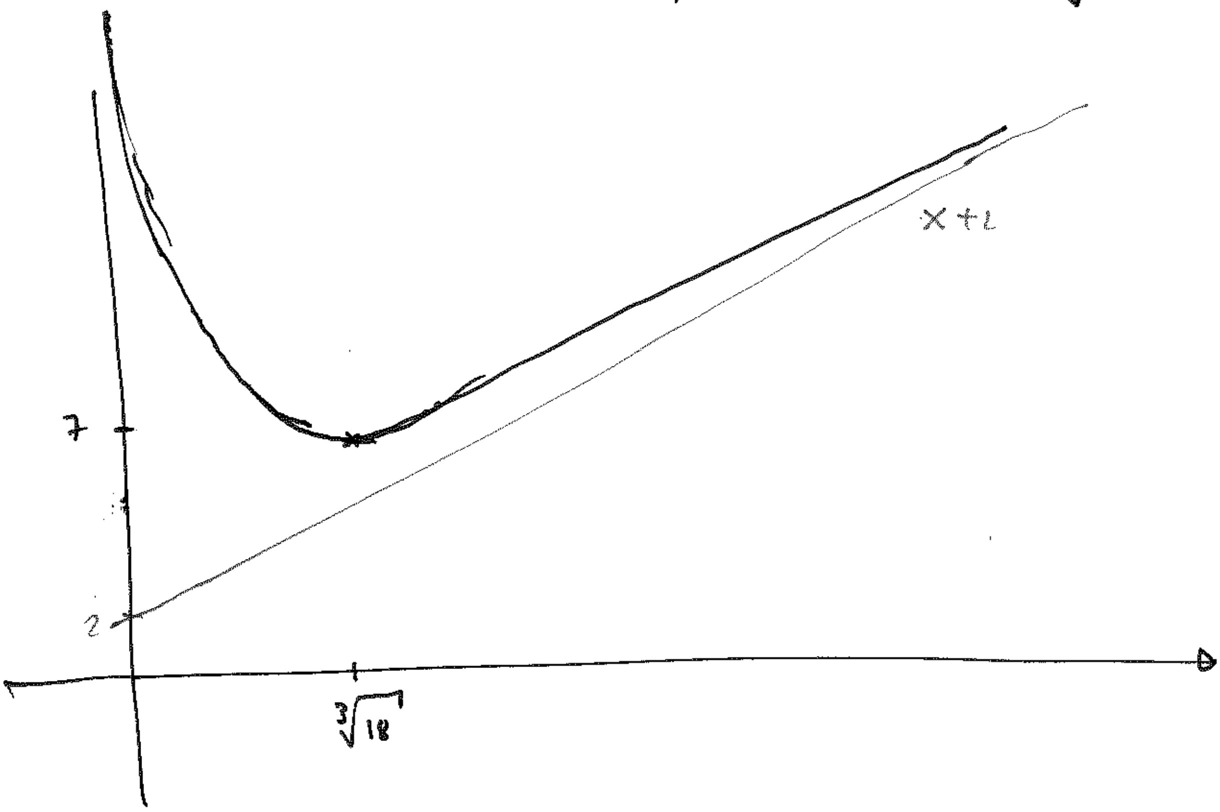
Svar minimivärde $l(\sqrt[3]{18}) = \frac{\sqrt[3]{18}+2}{\sqrt[3]{18}}\sqrt{\left((18)^{\frac{2}{3}}+9\right)} \approx 7$.

Ex2. Skissa grafen av $l(x)$, $x > 0$.

Lösning: Vi vet att $\lim_{x \to 0^+} l(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} l(x) = \infty$

och den enda extrempunkten är i $\sqrt[3]{18}$



för $0 < x < \sqrt[3]{18} \Rightarrow l'(x) = \frac{x^3-18}{x^2\sqrt{x^2+9}} < 0$

$x > \sqrt[3]{18} \Rightarrow l' > 0$

Assymptoter:

När $x \to \infty$ så beter sig $l(x)$ som

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{produkt} \\ \text{regeln} \end{array} \right\} = \lim_{x\to\infty} 1+\frac{2}{x} \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{9}{x^2}}$$

$$= 1.$$

Eftersom $1+\frac{9}{x^2} \to 1$ och $\sqrt{x}$ är kontinuerlig.

så ~~$l(x) = 1 \cdot x + m$ då~~ $l(x)$ har assymptoten

$1 \cdot x + m$. Vi bestämma m genom

$$0 = \lim_{x\to\infty} \left(l(x) - (x+m) \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x} \sqrt{x^2+9} - x \right) - m =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2+9} - x}_{= \frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}+x}} + \frac{2\sqrt{x^2+9}}{x} \right) - m = \left\{ \begin{array}{c} \text{summa} \\ \text{regeln} \end{array} \right\} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{9}{\sqrt{x^2+9}+x} \right)}_{0 \leq \quad \leq \lim \frac{9}{x} = 0} + 2 \underbrace{\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}_{=1} - m = 2 - m.$$

Så $x+2$ är en assymptot till $\frac{x+2}{x} \cdot \sqrt{x^2+9}$ då $x \to \infty$.

Exempel. Hitta alla lösningar, $x \geq 0$, till $\ln(x+7) = x$.

Lösning: Finns det någon lösning? Vi kollar

för $x = 0$ så $\ln(7) > 0$

och för $x = 3$ $\ln(10) < 3$.

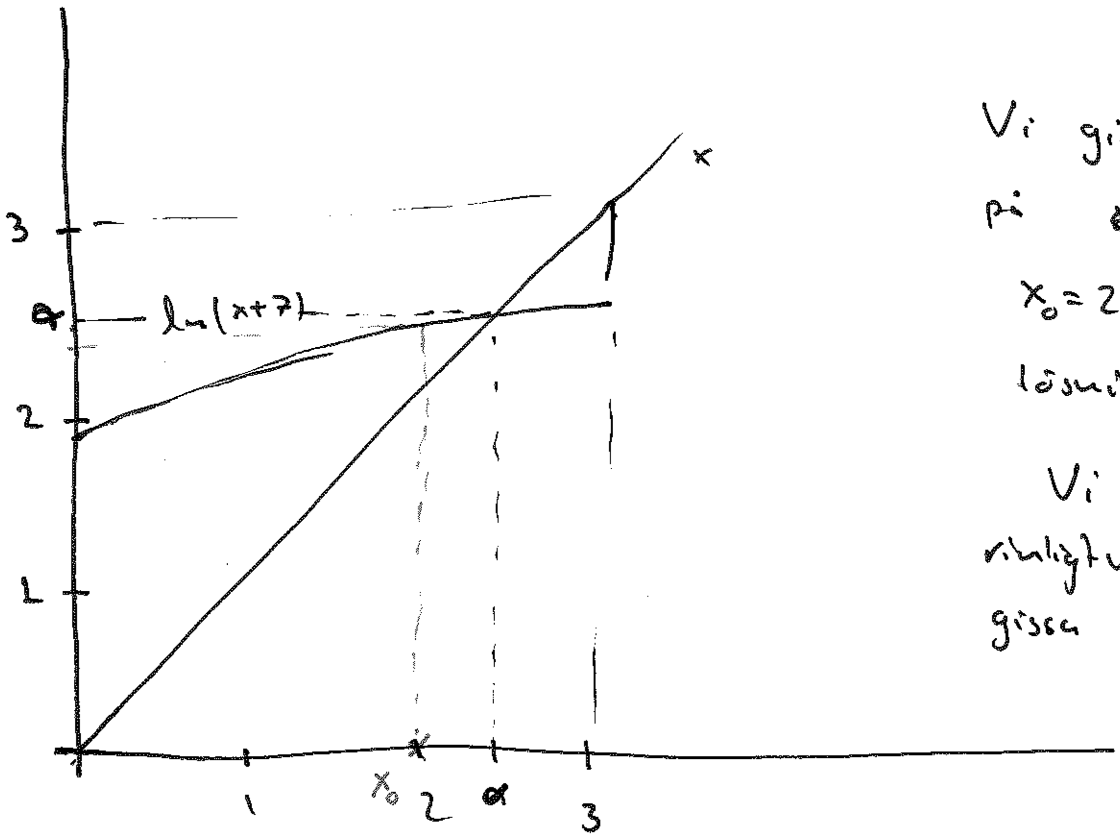
$\Rightarrow$ Existerar en lösning enl satsen om mellanliggande värden.

Vidare så är

$$\frac{d \ln(x+7) - x}{dx} = \frac{1}{x+7} - 1 < 0 \quad \text{för} \quad x \geq 0$$

så $\ln(x+7) - x$ är strikt avtagande så det finns endast en lösning.

Hur hittar vi den? Säg det α så att $\alpha = \ln(\alpha + 7)$.



Vi gissar på att $x_0 = 2$ är en lösning.

Vi kommer väsentligtvis att gissa fel

Felgissningen är $|\alpha - x_0|$.

Men observera att skillnaden ~~[illegible]~~

$$|f(x_0) - \underbrace{\alpha}_{f(\alpha)}| << |\alpha - x_0| \ ?$$

Observera att

$$|f(x_0) - f(\alpha)| = |f'(\xi)|\,|\alpha - x_0| \qquad \text{för något } \xi \in [\alpha, x_0].$$

så om $|f'| \leq \lambda < 1$ då kommer, med $f(x_0) = x_1$

$$|f(x_0) - \alpha| = |x_1 - \alpha| = |f'(\xi)|\,|\alpha - x_0| \leq \lambda\,|x_0 - \alpha|.$$

På samma sätt med $x_k = f(x_{k-1})$

$$|x_k - \alpha| \leq \lambda\,|x_{k-1} - \alpha| \leq \lambda^2\,|x_{k-2} - \alpha| \cdots \leq \underbrace{\lambda^k}_{\to 0}\,|x_0 - \alpha| \qquad (1)$$

då $k \to \infty$ eftersom $|\lambda| < 1$.

så $x_k \to \alpha$ då $k \to \infty$.

~~Vidare~~

Observera att $\frac{d \ln(x+7)}{dx} = \frac{1}{x+7} < \frac{1}{7}$ då $x > 0$

så, eftersom $|x_0 - \alpha| \leq 1$ så får vi

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{1}{7^k}$$

där $x_1 = \ln(2+7)$, $x_2 = \ln(x_1+7)$, $x_3 = \ln(x_2+7)$....

~~Frågan~~ Så om vi vill hitta ett svar med två siffror så skall $|x_k - \alpha| \leq \frac{1}{7^k} < 5 \cdot 10^{-3}$

$$\Rightarrow \quad -k \ln(7) < -3 \ln 10 + \ln(5)$$

$$\Rightarrow \quad k > \frac{3\ln(10) - \ln 5}{\ln 7} \approx 2.72$$

så $k = 3$ räcker,

svar $\alpha = \underbrace{\ln\Big(\underbrace{\ln\big(\underbrace{\ln(2+7)}_{x_1} + 7\big)}_{x_2} + 7\Big)}_{x_3}$.

<u>Sats:</u> Om $F(x)$ avbildar $[a, b]$ på $[a, b]$

och $|F'(x)| \leq \lambda < 1$ på $[a, b]$.

Då kommer $F(x) = x$ att ha en unik

lösning α.

Vidare så $\alpha = \lim(x_k)$

då $x_k = F(x_{k-1}) \ldots \underbrace{, x_0 \in [a, b].}_{\text{vilket tal som helst}}$