Föreläsning 14

Igår

Sats: Antag att $F(x)$ är definierad och deriverbar på $[a,b]$ och

1) F avbildar $[a,b]$ på $[a,b]$
2) $|F'(x)| \leq \lambda$ för alla $x \in [a,b]$ och $\lambda < 1$

Då har $F(x) = x$ en unik lösning α

och $\alpha = \lim_{k \to \infty} x_k$ där $x_{k+1} = F(x_k)$

och $x_0 \in [a,b]$

Vidare $|\alpha - x_k| \leq \lambda^k (\cancel{b}-\alpha) \leq \lambda^k [b-a]$

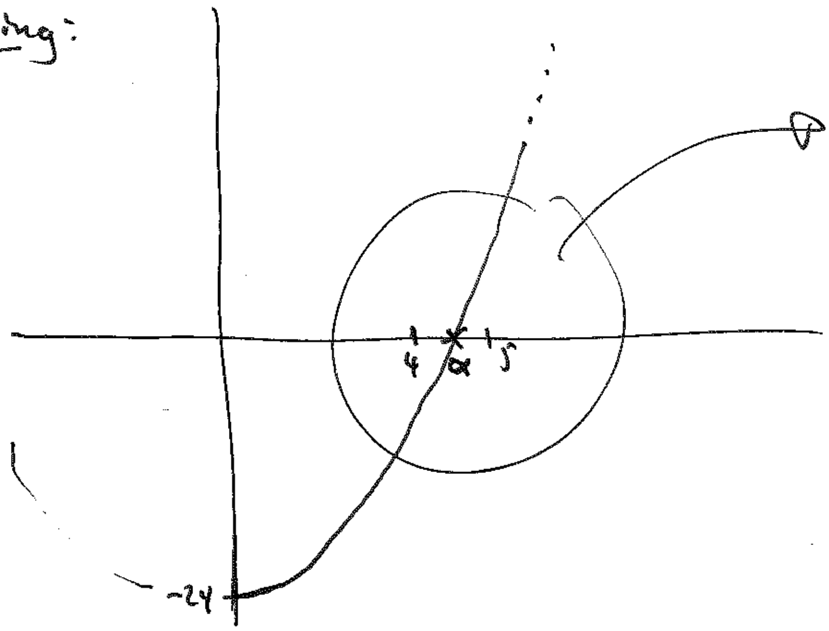
Idag ska vi titta på ett special fall och också betrakta primitiva funktioner (derivatans invers)

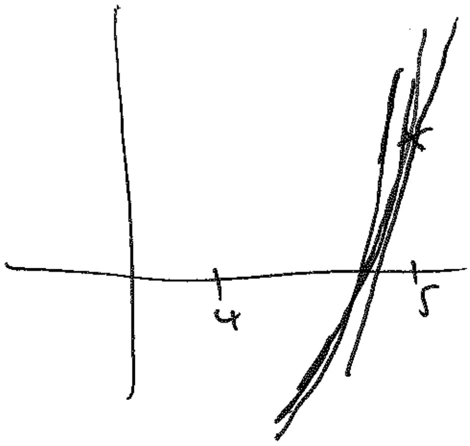
Tal. Hitta en $\overbrace{\text{lösning}}^{\text{approximativ}}$ $\beta \geq 0$ till

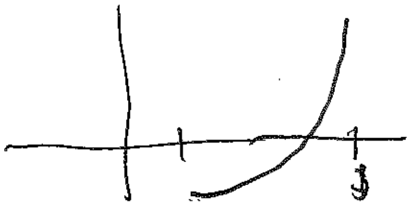
$x^2 - 24 = 0$ med $|\beta - \alpha| < 10^{-2}$

där α är den riktiga lösningen

Lösning:







Återigen, precis som igår, så gissar vi att $x_0 = 5$ är en lösning. Givetvis så är $x_0^2 - 24 = 1$ men $x_0 = 5$ är en hyfsad approximation.

Vi drar nu tangenten till $f = x^2 - 24$ i punkten $x_0 = 5$ (vilket är en dum gissning då $5^2 - 24 = 1$
~~vilket~~ $\frac{9}{2}$ är en klen gissning då $\frac{81}{4} - 24 = -\frac{15}{4}$

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \cancel{= 10(x-5) + f(5)}$$

$T(x) = 0$ då ~~$x = \frac{1}{10} + 5 = x_1$~~

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 5 - \frac{1}{10} \equiv x_1 = \frac{49}{10}$$

På samma sätt sätter vi

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{49}{10} - \frac{\left(\frac{49}{50}\right)^2 - 24}{2\,\frac{49}{10}} = \frac{49}{10} - \frac{49^2 - 24\cdot(10)^2}{2\cdot 49\cdot 10}$$

$$= \frac{49^2 + \overbrace{24\cdot(10)^2}^{48\cdot 50}}{2\cdot 49\cdot 10} = \frac{2\cdot(49)^2 - 1}{2\cdot 49\cdot 10} = \frac{49}{10} - \frac{1}{2\cdot 49\cdot 10}$$

Hur vet vi om ~~lösningen~~ x_2 är ~~nära~~ uppfyller $|\alpha - x_2| < 10^{-2}$?

Sats [Newton–Raphsons metod].

Låt $f(x)$ vara en två gånger deriverbar $[a-\tau, a+2\tau]$ funktion och $f(a) < 0 < f(\cancel{b})$, f definierad på hela $[a,b]$

Antag vidare att, $|f'| > 0$ $(f' > 0)$ på $\cancel{[a,b]}$ och $[a-\tau, a+2\tau]$

$$\left| \frac{f(x) f''(x)}{|f'(x)|^2} \right| \leq \lambda < 1 \qquad (1)$$

~~Definition~~ Välj något $x_0 \in [a, \cancel{b}]$ och definiera

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} .$$

contraction mapping med $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Då kommer $x_k \to \alpha$ där α är den unika lösningen till $f(x) = 0$ i $[a, \cancel{b}]$.

Vidare så $|\alpha - x_k| \leq \lambda^k |x_0 - \alpha| \leq \lambda^k \tau$.

Bevis. Om $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, då kommer

$F(x) = x$ om och endast om $-\dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0$,

dvs $f(x) = 0$. Så om vi kan hitta en lösning α till $F(\alpha) = \alpha$ så är α en lösning till $f(x) = 0$.

Observera att

$$|F'(x)| = \left| 1 - \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{f'(x)} \right| = \left\{ \begin{matrix} \text{kvot} \\ \text{regel} \end{matrix} \right\} = \left| \cancel{1} - \frac{\cancel{(f'(x))^2} - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq \lambda \quad \text{för} \quad x \in [a-\tau, a+2\tau]$$

Från satsen om mellanliggande värden så kommer $F(x) = x$ att ha en lösning i $[a, a+\tau]$ och eftersom $F(x) - x$ har strikt negativ derivata så är $F(x) - x$ injektiv så det finns endast ett nollställe i $[a, a+\tau]$

Vi argumenterar som igår, men mer ~~formellt~~ formellt

Via induktion. Antag att $|x_k - \alpha| \leq \lambda^k \tau$

då kommer $|x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda^{k+1}\tau$.

~~Steg~~ Bevis. Per definition så är

$\alpha = F(\alpha)$ och $x_{k+1} = F(x_k)$ så

$$|x_{k+1} - \alpha| = |F(x_k) - F(\alpha)| = \left\{\begin{matrix}\text{medelvärdes}\\ \text{satsen}\end{matrix}\right\} = |F'(\xi)|\,|x_k - \alpha|.$$

För något $\xi \in [\alpha, x_k] \subset [\alpha - \cancel{\lambda^k}\tau, \alpha + \cancel{\lambda^k}\tau] \subset [a-\tau, a+2\tau]$

eftersom $\alpha \in [a, a+\tau]$.

Så

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda\, |x_k - \alpha| \leq \lambda^{k+1}\tau.$$

Vi måste bevisa att $|x_0 - \alpha| \leq \lambda^0 \tau = \tau$.

Men detta är självklart då $\alpha \in [a, a+\tau]$

och $x_0 \in [a, a+\tau]$.

Slutsats: $F(x) = x$ och därför $f(x) = 0$

har ett unikt nollställe $\alpha \in [a, a+\tau]$

och för alla k så

$$|x_k - \alpha| \leq \lambda^k \tau.$$

Åter till vårt exempel:

Vi använder satsen med $a = \frac{9}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

Vi måste visa att $\left| \frac{f(x)\, f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \le \lambda < 1 \qquad x \in [4, \frac{11}{2}]$

för något λ. Det är lätt att beräkna

$$\left| \frac{f(x)\, f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \left| \frac{(x^2-24)\cdot 2}{4x^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} - \frac{12}{x^2} \right| .$$

Funktionen $\frac{1}{2} - \frac{12}{x^2}$ har derivatan $\frac{24}{x^3} > 0$

så det finns inga inre extrempunkter i intervallet $[4, \frac{11}{2}]$ så $\max \left| \frac{1}{2} - \frac{12}{x^2} \right|$ sker på en randpunkt. Vi prövar $x = 4$

$$\frac{1}{2} - \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{16}_{\,4}} = -\frac{1}{4} .$$

$x = {}^{11}\!/_{2}$ ger

$$\frac{1}{2} - \frac{12}{(\frac{11}{2})^2} = \frac{1}{2} - \frac{48}{121} = \frac{121 - 96}{2 \cdot 121} = \frac{25}{242} < \frac{1}{4}$$

Så $\left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \le \frac{1}{4}$ för $x \in [4, \frac{11}{2}]$

Det följer att

$$|x_k - \alpha| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^k}_{\lambda^k} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\tau} \leqslant 10^{-2} \quad \text{om}$$

$$\ln\frac{1}{2} + \cancel{2}k \ln\frac{1}{\cancel{4}2} \leqslant -2\ln 10$$

$$\Rightarrow \quad k \geqslant \frac{2\ln 10 + \ln(\frac{1}{2})}{2\ln(2)} \approx 3.82.$$

Så vi måste beräkna x_4.

Vi vet att $x_2 = \frac{49}{10} - \frac{1}{2 \cdot 49 \cdot 10}$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 24}{2x_2}, \quad \boxed{x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 24}{2x_3}}$$

Svar...

Primitiva funktioner

Definition. Låt f vara definierad på ett intervall I. En deriverbar funktion F kallas en primitiv funktion till f om

$$F'(x) = f(x) \quad \text{för alla} \quad x \in I.$$

Exempel. Hitta alla primitiva funktionen till $f(x) = 2x^2 + 3$.

Svar: Vi vet att $F(x) = \frac{2x^3}{3} + 3x$ är en primitiv funktion till $f(x)$ eftersom

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\cancel{3} \cdot 2 \cdot x^2}{\cancel{3}} + 3 = f(x).$$

Vi ska nu hitta ALLA primitiva.

Så låt $G(x)$ vara en annan primitiv. till f

~~Då~~

$$\cancel{\frac{d(F(x)-G(x))}{dx} = F'(x) - G'(x) = \underbrace{f(x) - f(x)}_{\text{Eftersom } F \,\&\, G \text{ är primitiva}} = 0}$$

~~Så~~

Då är $F'(x) = f(x) = G'(x)$ så

$F'(x) - G'(x) = 0$. Vi vet att om

$$\frac{d(F(x) - G(x))}{dx} = 0$$

för alla x så är

$F(x) - G(x) = \text{konstant} = C$. så $G = F + C$

Svar: ~~Alla~~ primitiva till $2x^2 + 3$

är på formen $\frac{2x^3}{3} + 3x + C$

för en godtycklig konstant $C \in \mathbb{R}$.

Princip: Om $F(x)$ är en primitiv till f på I

så är alla primitiva på formen

$F(x) + C$ för $C \in \mathbb{R}$.

Kommentar: Primitiva funktioner är en naturlig utvidgning av derivatan. För varje operation så är det legitimt att fråga efter inversen.

~~[illegible]~~ Notation:

Ofta skriver man

$\int f(x)\,dx$ för alla primitiva

funktioner till f?

Lista med elementära primitiva funktioner

$$\int a\,dx = ax + C \qquad \text{för } a \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

etc

För derivering så använde vi de elementära funktionerna och räkneregler för $\pm, \cdot, \div, \circ, f^{-1}$ för att derivera alla funktioner. Integrering är mycket svårare och vi har inte, kan inte ha, en komplett teori.

Dock så borde alla satser för derivator ha en motsvarande sats för integraler.

Tex.

Kedjeregeln. $D(F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x)$

Så $F(g(x))$ är en primitiv till $f(g(x))\,g'(x)$

om $F' = f$.

Sats [Variabel substitution]

Om f har en primitiv funktion F

och g är deriverbar så

$$F(g(t)) = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt + C$$

Observera att detta säger

$$\underbrace{\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)}}_{F(x) = F(g(t))} = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt + C$$

Detta är en kraftfull räkneregel.

Exempel. Hitta alla primitiva till

$$\frac{x+3}{\sqrt{x+2}} \qquad x > -2.$$

Svar: Vi ska beräkna $\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

$\sqrt{x+2}$ är den besvärliga termen

så vi sätter $y = \sqrt{x+2}$. $\Rightarrow g(y) = y^2 - 2 = x$

Då är $\frac{x+3}{\sqrt{x+2}} = \frac{x+2 \quad +1}{\sqrt{x+2}} = \frac{y^2+1}{y}$

så $\int \underbrace{\frac{x+3}{\sqrt{x+2}}}_{=f(x)}\,dx = \int \underbrace{\frac{y^2+1}{y}}_{\frac{g(y)+3}{\sqrt{g(y)+2}} = f(g(y))}\,d\cancel{x}$

~~f(g(y))~~

så vi ska skriva $g'(y)\,dy = 2y\,dy$

istället för dx så

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\,dx = \int \frac{y^2+1}{y}\cdot 2y\,dy = 2\int y^2+1\,dy = 2\frac{y^3}{3} + 2y + c$$

$$= \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} + 2\sqrt{x+2} + C \qquad = \text{Svar.}$$

Kort svar

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y=\sqrt{x+2} \\ dy = \frac{d\sqrt{x+3}}{dx}\,dx = \\ = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx = \frac{1}{2y}\,dx \end{array} \quad \middle| \quad 2y\,dy = dx \right\} =$$

$$= \int 2\,\frac{y^2+1}{\cancel{y}}\,\cancel{y}\,dy = \ldots$$

Nästa deriveringsregel är

$$D\big(F(x)g(x)\big) = F'(x)\,g'(x) = F'(x)\,g'(x) = f(x)g(x)$$

<u>Sats</u>: Om $F(x)$ är primitiv till f på I och g är deriverbar så

$$\int f\,g\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx + C$$

Bevis: Derivatan av VL är $f(x)g(x)$.

Derivatan av HL är

$$F'(x)g(x) + \cancel{F(x)g'(x)} - \cancel{F(x)g'(x)} = F'(x)g(x) = f(x)g(x)$$

Så derivatan av VL = derivatan av HL. $\boxed{\square}$

Så $VL - HL = C$

Exempel: Hitta alla primitiva till arctan(x).

Svar: Vi ska beräkna

$$\int \arctan(x)\,dx = \left\{ \frac{dx}{dx} = 1 \right\} = \int \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{f(x)} \underbrace{\arctan(x)}_{g(x)}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(x)=1, \quad F(x)=x \\ g(x)=\arctan(x) \\ \text{partiell integration} \end{array} \right\} = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

$$= x\arctan(x) - \int x \underbrace{\frac{d\arctan(x)}{dx}}_{\frac{1}{1+x^2}}\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{substitution} \\ y = 1+x^2 \\ dy = 2x\,dx \end{array} \right\} = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy =$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|y| + C = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$