Föreläsning 15.

Under den senaste föreläsningen (innan jag drabbades av en blackout) så introducerade vi primitiva funktioner.

Def: Låt $f(x)$ vara en funktion då säger vi att $F(x)$ är en primitiv till f på området D om $F'(x) = f(x)$ på D.
Vi använder också notationen

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Då $F(x)$ definieras med hjälp av derivatan så måste allt vi vet om derivering kunna användas för att beräkna primitiva funktioner.

<u>Variabel substitution:</u>

Kedjeregeln säger att

$$\frac{d\,f(g(x))}{dx} = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$\Rightarrow \int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x)).$$

Sats [Variabel subst.] Antag att g är deriverbar, då

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t))\,g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}.$$

Bevis: Vi vet att om $g(t)=x$ så

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = F(\underbrace{g(t)}_{=x}) = \int f(x)\,dx.$$

$\blacksquare$

Exempel. Hitta alla primitiva till $\frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$.

Lösning! $\sqrt{x}$ är uppenbarligen lite knepig så vi sätter $t=\sqrt{x}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dx \to \frac{dt}{2\sqrt{x}} \\ \text{dvs } g(t)=\sqrt{t} \\ f=\cos \end{array}\right\} = 2\int \cos(t)\,dt =$$

$$= 2\sin(t)+C = 2\sin(\sqrt{x})+C$$

Partiell integration

Produkt regeln säger att

$$\frac{d\, f(x)g(x)}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Så

$$f(x)g(x) = \int \frac{d\, f(x)g(x)}{dx}\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Så

Sats: Om f, g är deriverbara så

$$\int f(x)g'(x)\,dx = -\int f'(x)g(x)\,dx + f(x)g(x).$$

Exempel. Beräkna $\int e^x \ln(3+e^{2x})\,dx$.

Svar: Vi beräknar

$$\int e^x \ln(3+e^{2x})\,dx = \left\{ \frac{de^x}{dx} = e^x \right\} =$$

$$= \int \underbrace{\frac{de^x}{dx}}_{f'} \underbrace{\ln(3+e^{2x})}_{g}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \ln(3+e^{2x}) - 2\int \frac{\cancel{e^x \, e^{2x}}^{\,(e^x)^3}}{3+\underbrace{\cancel{e^{2x}}}_{(e^x)^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{substit} \\ y = e^x \\ dy = e^x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \ln(3+e^{2x}) - 2\int \frac{y^2}{3+y^2}\,dy =$$

$$= \text{—— '' ——} - 2\int \left(1 - \frac{3}{3+y^2}\right) dy =$$

$$= \text{—— '' ——} - 2y + 2\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{y}{\sqrt{3}} \\ dz = \frac{1}{\sqrt{3}}\,dy \end{array} \right\} = e^x \ln(3+e^{2x}) - 2e^x + 2\sqrt{3} \int \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

$$= e^x \ln(3+e^{2x}) - 2e^x + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

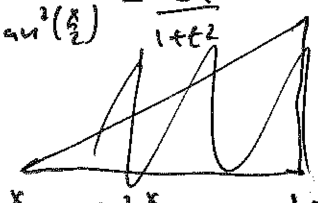
$$\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \arctan(z) + C = \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) + C = \arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Vi har nu två kraftfulla metoder att använda när vi ska hitta primitiva funktioner (vi kommer att lära oss en tredje). Kan vi systimatisera vår kunskap?

Finns det "regler" för hur man skall substituera/använda partiell integration?.

Svaret är i allmänhet nej. Man måste beräkna många tal och få en känsla för integrationen. Vi har dock vissa tumregler. Om $f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ så

Integrand	Substitution	Ny integral
$f(\sqrt{x+\alpha}, x)$	$t = \sqrt{x+\alpha} \iff t^2 - \alpha = x$ $\Rightarrow dx = 2t\,dt$	$\int f(t, t^2-\alpha)\, 2t\,dt$
$f\left(\sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}, x\right)$	$t = \sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}} \iff x = \frac{\beta t^2 - \alpha}{1-t^2}$ $dx = \frac{2\beta t(1-t^2) + 2t(\beta t^2 - \alpha)}{(1-t^2)^2}\,dt$	$\int f\left(t, \frac{\beta t^2 - \alpha}{1-t^2}\right) \frac{(2\beta - 2\alpha)t}{(1-t^2)^2}\,dt$
$f(\sin(x), \cos(x))$	$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \iff x = 2\arctan t$ $dx = 2\frac{1}{1+t^2}\,dt$ $\sin(x) = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})} =$ $= \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$	$\int 2 f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2}\,dt$



$$\cos(x) = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^3}{1+t^2}$$

Observera att om $$f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

så kommer $f(t, t^2-\alpha)$ = kvot av två poly i t

$f\left(t, \frac{\beta t^2-\alpha}{1-t^2}\right)$ = — " — i t

$f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ = — " — t

---

Så många integraler går att reducera till integralen $\int \frac{p(t)}{q(t)}\,dt$ för polynom $p(t)$, $q(t)$.

Frågan: Kan vi hitta ett sätt att ~~integrera~~ beräkna

$$\int \frac{p(t)}{q(t)}\,dt \quad ?$$

[Den tredje metoden.]

Exempel. ~~Beräkna~~ Hitta alla primitiva till, $x \geq 0$

$$\frac{\sin(x)}{2\sin^2(x) + \cos^2(x)}$$

Svar: Vi börjar med att förenkla

$$\int \frac{\sin(x)}{2\sin^2(x) + \cos^2(x)}\,dx = \int \frac{\sin(x)}{1 + \sin^2(x)}\,dx$$

Nu använder vi standard substitutionen

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow 2\arctan(t) = x \Rightarrow \frac{2}{1+t^2}\,dt = dx$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$ så

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 4\int \frac{t}{(1+t^2)^2 + 4t^2}\,dt = \cancel{4}2\int \frac{2t}{1+6t^2+t^4}\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t^2 = z \\ 2t\,dt = dz \end{array} \right\} = 2\int \frac{1}{1+6z+z^2}\,dz$$

Observera att vi får $\int \frac{p(t)}{q(t)}\,dt$ efter

substitutionen ~~[illegible]~~ $t = \tan(\frac{x}{2})$, $t \geq 0$

Vi måste beräkna $2\int \frac{1}{1+6z+z^2}\,dz$.

För att göra det så kommer vi att använda en omskrivning som vi kommer att prata mer om imorgon.

1) Vi börjar med att hitta nollställena till $1+6z+z^2$.

$$1+6z+z^2=0 \iff z = -3 \pm \sqrt{8}$$

$$\iff 1+6z+z^2 = (z+3+\sqrt{8})(z+3-\sqrt{8})$$

2) Vi ansätter

$$\frac{0z+1}{1+6z+z^2} = \frac{a}{z+3+\sqrt{8}} + \frac{b}{z+3-\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{za+3a-\sqrt{8}a+zb+3b+\sqrt{8}b}{1+6z+z^2} =$$

$$= \frac{\overbrace{(a+b)}^{=0}z + \overbrace{(3a+3b - \sqrt{8}a+\sqrt{8}b)}^{=1}}{1+6z+z^2}$$

Om likhet gäller så måste

$$\left.\begin{aligned} & a+b=0 \\ & \underbrace{3a+3b}_{3\underbrace{(a+b)}_{=0}=0} - \sqrt{8}\,a + \sqrt{8}\,b = 1 \end{aligned}\right\} \text{Lin Alg} \begin{cases} \cancel{b} \quad a = -b \\ 2\sqrt{8}\,b = 1 \end{cases}$$

så $b = \frac{1}{2\sqrt{8}}$, $a = -\frac{1}{2\sqrt{8}}$ så

$$\frac{1}{1+6z+z^2} = -\frac{1}{2\sqrt{8}} \frac{1}{z+3+\sqrt{8}} + \frac{1}{2\sqrt{8}} \frac{1}{z+3-\sqrt{8}}$$

Och därför, steg 3,

$$2\int \frac{1}{1+6z+z^2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{8}} \int \left(\frac{-1}{z+3+\sqrt{8}} + \frac{1}{z+3-\sqrt{8}} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \left(-\ln\left(z+3+\sqrt{8}\right) + \ln\left(z+3-\sqrt{8}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \ln\left(\frac{z+3-\sqrt{8}}{z+3+\sqrt{8}} \right) + C = \left\{ z = t^2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{8}} \ln\left(\frac{t^2+3-\sqrt{8}}{t^2+3+\sqrt{8}} \right) + C =$$

$$= \left\{ t = \tan\left(\tfrac{x}{2}\right) \right\} = \frac{1}{\sqrt{8}} \ln\left(\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+3-\sqrt{8}}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+3+\sqrt{8}} \right) + C = \text{Svar}$$