F16

Igår såg vi att om $f(x,y)$ är en rationell funktion så kommer

1) $$\int f(\sqrt{x+\alpha}, x)\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{subst} \\ t=\sqrt{x+\alpha}\end{matrix}\right\} = \int \underbrace{f(t, t^2-\alpha)\,2t}_{\text{rationell funktion}}\,dt$$

2) $$\int f\left(\sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}, x\right)dx = \left\{\begin{matrix}\text{subst} \\ t=\sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}\end{matrix}\right\} = \int \underbrace{f\left(t, \frac{\beta t^2-\alpha}{1-t^2}\right)\frac{(2\beta-2\alpha)t}{(1-t^2)^2}}_{\text{rationell}}\,dt$$

3) $$\int f(\sin(x), \cos(x))\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{subst} \\ t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\end{matrix}\right\} = \int \underbrace{2\,f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}}_{\text{rationell}}\,dt$$

Givetvis så är det också intressant att kunna ~~integrera~~ hitta primitiva:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

då $p(x)$ och $q(x)$ är ~~rationella~~ polynom:

$\frac{p(x)}{q(x)}$ är rationell.

Kan vi hitta en metod att beräkna

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \; ?$$

Partialbråksuppdelning.

Steg 1 Om graden av $p(x) \geq$ grad $(q(x))$ så kan vi utföra en polynomdivision

$$p(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$$

där resten $r(x)$ uppfyller grad $(r(x)) <$ grad $(q(x))$

så

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{g(x)\,q(x) + r(x)}{q(x)}\,dx = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{\text{lätt}} + \underbrace{\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx}_{\substack{\text{grad täljare} \\ < \text{ grad} \\ \text{nämnare}}}$$

Exempel. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x+4}{x^2+1}\,dx$

Vi utför polynomdivisionen

$$\begin{array}{l|l} \quad x & \text{rest } x+4 \\ \hline x^3+2x+4 & \boxed{x^2+1} \\ -x(x^2+1) & \\ \quad x+4 & \end{array}$$

så $\quad x^3+2x+4 = x(x^2+1) + (x+4)$

Så

$$\int \frac{x^3+2x+4}{x^2+1}\,dx = \underbrace{\int x\,dx}_{\frac{x^2}{2}+C} + \int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+C + \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1}\,dx}_{=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} + 4\underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx}_{=\arctan(x)} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\arctan(x) + C.$$

Steg 2. Faktorisera nämnaren i $\frac{p(x)}{q(x)}$

$$q(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots\quad (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{l_1}(\sim)^{l_2}$$

Ansätt att

$$\frac{p(x)}{q(x)} = ?\quad ?$$

Där högerledet ska innehålla

$q(x)$ har faktorn	Högerledet ska innehålla
$(x-a)$	$\dfrac{\alpha}{x-a}$
$(x-a)^k$	$\dfrac{\alpha_k}{(x-a)^k} + \dfrac{\alpha_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \dfrac{\alpha_1}{x-a}$
(x^2+ax+b)	$\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}$
$(x^2+ax+b)^k$	$\dfrac{\alpha_k x+\beta_k}{(x^2+ax+b)^k} + \dfrac{\alpha_{k-1}x+\beta_{k-1}}{(x^2+ax+b)^{k-1}} \cdots + \dfrac{\alpha_1 x+\beta_1}{x^2+ax+b}.$

Beräkna sedan alla konstanter i högerledet.

Detta kallas partialbråksuppdelning.

Exempel. Partialbråksuppdela

$$\frac{x^2+3x}{(x+2)^2\,(x^2+x+1)}$$

Svar: Vi vill skriva

$$\frac{x^2+3x}{(x+2)^2(x^2+x+1)} = \underbrace{\frac{a_2}{(x+2)^2} + \frac{a_1}{x+2}}_{\text{Eftersom nämnaren har faktorn } (x+2)^2} + \frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}.$$

Förläng båda led med $(x+2)^2(x^2+x-1)$

$$x^2+3 = a_2(x^2+x-1) + (x^2+x+1)(x+2)a_1 + (\alpha x+\beta)(x+2)^2 \qquad (1)$$

Vi beräknar

$$(x^2+x-1)(x+2) = x^3+3x^2+x+2$$

$$(\alpha x+\beta)(x+2)^2 = (\alpha x+\beta)(x^2+4x+4) = \alpha x^3 + (\beta+4\alpha)x^2 + (4\alpha+4\beta)x + 4\beta$$

Så vi kan skriva ①

$$
\left.\begin{aligned}
x^2+3 = {} & (a_1+\alpha)x^3 \\
& + (a_2+3a_1+\beta+4\alpha)x^2 \\
& + (a_2+a_1+4\alpha+4\beta)x \\
& + (+a_2+2a_1+4\beta)
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases}
a_1+\alpha = 0 \\
a_2+3a_1+\beta+4\alpha = 1 \\
a_2+a_1+4\alpha+4\beta = 0 \\
+a_2+2a_1+4\beta = 3
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ +2 & +1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Subtrahera första raden från övriga

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & +1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{3}\,1 \\ 0 & 0 & \cancel{-3}\,1 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$\alpha = -1/3$ $\qquad \beta = -2/3 - \frac{5}{3}\alpha = -\frac{6}{9} + \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$

$$a_2 = 1 - \beta - \alpha = \frac{9 + 1 + 3}{9} = \frac{13}{9}$$

$$a_1 = -\beta = \frac{1}{9}$$

Så $$\frac{x^2+3x}{(x+2)^2(x^2+x-1)} = \frac{13}{9}\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{x+2} + \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}}{x^2+x-1}$$

Varför är det här viktigt?

Exempel: Beräkna $\int \frac{x^2+3x}{(x+2)^2(x^2+x+1)}\,dx$.

Svar

$$\int \frac{x^2+3x}{(x+2)^2(x^2+x+1)}\,dx = \underbrace{\frac{13}{9}\int \frac{1}{(x+2)^2}}_{=\frac{13}{9}\frac{1}{x+2}} + \underbrace{\frac{\cancel{10}}{9}\int\frac{1}{x+2}}_{\frac{\cancel{10}\,1}{9}\ln(x+2)}$$

$$-\frac{1}{9}\int \frac{+3x \cancel{+12}\ 1}{x^2+x-1}\,dx$$

Så vi behöver bara kunna beräkna

$$-\frac{1}{9}\int \frac{3x-12}{x^2+x-1}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t \\ x^2+x-1 = \\ = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = t^2+\frac{3}{4} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 3x \cancel{-12}+1 = \\ = 3\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{\cancel{24}-3}{2} = \\ = 3t - \cancel{\tfrac{27}{2}}\,\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$= -\frac{1}{9}\int \frac{3t}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{\cancel{27}\,1}{2}\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{\cancel{3}\,27}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + C$$

Så partialbråksuppdelning reducerar

$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ till att integrera

en rad ~~enkla~~ enklare integraler

på formen $\frac{1}{x+a}$, $\frac{1}{(x+a)^k}$, $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}$, $\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^k}$