Föreläsning 17

I Fredags så sade vi att vi kan reducera varje rationell funktion till en summa av följande 4 typer av ~~[illegible]~~ funktioner

1) $\int \frac{\alpha}{x-a}\,dx$	2) $\int \frac{\alpha}{(x-a)^k}\,dx$, $k=2,3,\ldots$	3) $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}\,dx$	4) $\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^k}\,dx$
$\alpha \ln\lvert x-a\rvert + C$	$-\frac{\alpha}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$	Vi gjorde en sådan förra föreläsningen	? ?

~~3) $y = x + \frac{a}{2}$~~

<u>Exempel 3:</u>

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+13}\,dx = \left\{\begin{array}{l|l} \text{Sätt} & x^2+4x+13 = \\ y = x+2 & =(x+2)^2+9 = y^2+9 \\ dy = dx & x+3 = y+1 \end{array}\right\} =$$

$$= \int \frac{y+1}{y^2+9}\,dy = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2y}{y^2+9}}_{\frac{d}{dx}\ln(y^2+9)}\,dy + \underbrace{\int \frac{1}{y^2+9}\,dy}_{=\frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{y}{3}\right)^2+1}\,dy} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(y^2+9\right) + C + \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{y}{3}\right)^2+1}\,dy = \left\{\begin{array}{l} \frac{y}{3} = z \\ dy = 3dz \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(y^2+9\right) + C + \frac{1}{3}\int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\ln\left((x+2)^2+9\right) + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + C.$$

3) $$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}\,dx = \left\{\begin{matrix} y = x+\frac{a}{2} \\ x^2+ax+b = \\ = y^2+b-\frac{a^2}{2}\end{matrix}\right\} = \underbrace{\int \frac{\alpha y+\cancel{\beta-\frac{\alpha a}{2}}^{\,d}}{y^2+\underbrace{\cancel{b-\frac{a^2}{2}}}_{c}}\,dy}_{=\int \frac{\alpha y+\gamma}{y^2+c}\,dy}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2y}{y^2+c}\,dy + \frac{\gamma}{c}\underbrace{\int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)^2+1}}_{=\frac{\gamma}{\sqrt{c}}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)}$$

Beräkna.

Exempel 4 $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

Svar: Vi använder ett trick.

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{dx}{dx}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{part}\\ \text{int}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} - \int x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x}{x^2+1} + \int x\,\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

Vad vi har lärt oss om primitiva funktioner

0) Lista med elementära integraler

1) Partiell integration: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

2) Variabel substitution

3) Partialbråksuppdelning

1/ $\frac{\alpha}{x-a}$

2/ $\frac{\alpha}{(x-a)^k}$

3/ $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}$

4/ $\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^k}$

4) Standard substitutioner, $f(x,y)$ rationell

innehåller	
$\sqrt{x+\alpha}$	$t = \sqrt{x+a}$
$\sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}$	$t = \sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}$
$\sqrt{x^2+ax+b} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+\alpha}$	$t = x + \sqrt{x^2+\alpha}$
$\sqrt{\alpha - x^2}$	$t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{\alpha}}$
$\sin(x)$ $\cos(x)$	$t = \tan(\frac{x}{2})$

<u>Fråga</u>: Vilken metod behövs för att lösa

$$\int e^{x^2} dx \,? \quad , \quad \int e^{\sin(x)} dx \,?$$

<u>Svar</u>: Ingen, vi kan inte hitta primitiva funktioner till dessa. (Det går inte och vi har inte lärt oss några metoder).

Inför KSen nästa vecka.

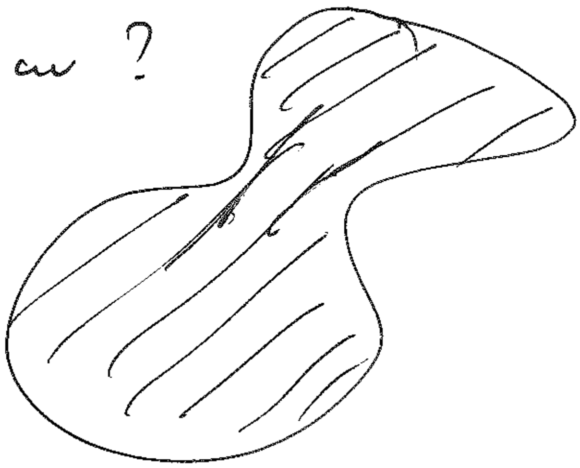
1) Läs ~~kapitlet~~ kapitel 5. Massa exempel. Var medvetna om metoderna.

2) På veckolappen så ~~7~~8 står det specificerat vilken typ av metod som skall användas.
Jag vill <u>inte</u> att ni ska vara supermatte och komma på ~~ny~~ matematik på KSen utan jag kommer att kolla att ni kan dessa metoder.

3) KSen har samma utformning som förra gången.

Varför bryr vi oss så mycket om primitiva funktioner. Naturligtvis eftersom primitiva funktioner är relaterade till beräkning av ytan under en graf, men det ska vi prata om i morgon. Idag ska vi prata om ytor.

Vad är ytan av ?



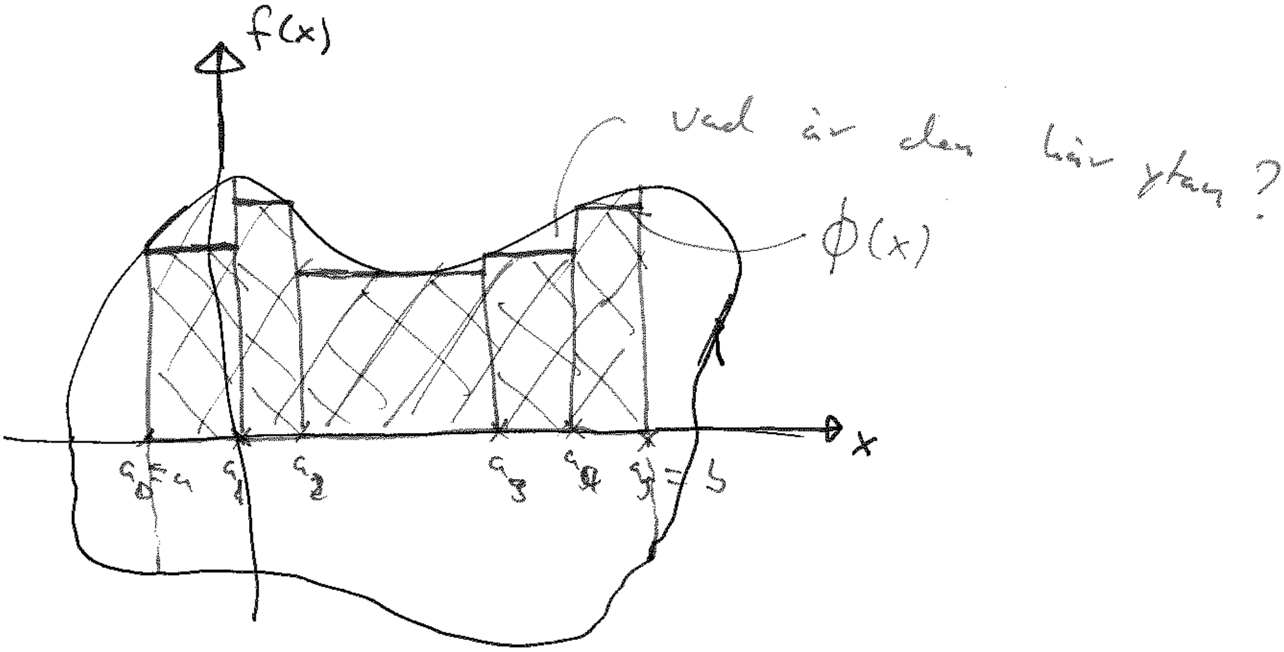
Vad är definitionen av yta?

Vilka ytor kan vi beräkna?

<u>Definition</u>: Vi ~~säger att~~ kallar talet vi får om vi multiplicerar basen med höjden i en rektangel för ytan av rektangeln.

En kropp bestående av flera (icke överlappande) rektanglar sägs ha en area som är lika med summan av dessa rektanglar.

Det fantastiska är att vi kan använda dessa rektanglar för att beräkna väldigt generella ytor.



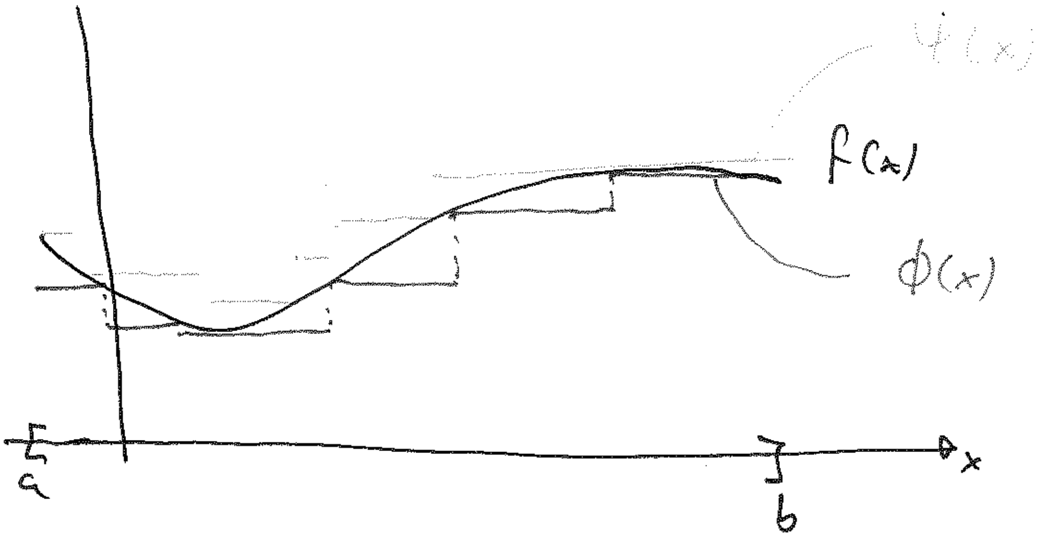
Vi har endast definierat yta för rektanglar så vi kan inte säga vad ytan är då det inte är en rektangel. Men vi kan hitta en yta som är mindre (intuitivt i alla fall).

__Definition__: Vi säger att $\phi(x)$ är en trappfunktion på $[a,b]$ om det finns ett ändligt antal $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$ ~~så att~~ och tal c_j så att

$$\phi(x) = c_j \qquad \text{för} \qquad x \in \,]a_{j-1}, a_j[\,.$$

Om ϕ är en trappfunktion som ovan så definierar vi integralen av $\phi(x)$ på $[a,b]$ som

$$I(\phi) = \sum_{j=1}^{k} c_j \underbrace{(a_j - a_{j-1})}_{\text{arean av en rektangel.}} \quad (= \text{arean under grafen}).$$



Intuitivt så är

$$I(\phi) = \text{ytan under } \phi \leq \text{ytan under } f \leq \text{ytan under } \psi = I(\psi)$$

vad nu "ytan ~~betyd~~ under f" betyder.

Definition: En begränsad funktion $f(x)$ definierad på $[a,b]$ sägs vara (Riemann) integrerbar om det för varje tal $\varepsilon > 0$ existerar två trappfunktioner ϕ, ψ så att

$$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{för } x \in [a,b]$$

och

$$I(\psi) - I(\phi) < \varepsilon .$$

Sats: Låt $f(x)$ vara begränsad på $[a,b]$. Då är $f(x)$ integrerbar om och endast om

$$\sup I(\phi(x)) = \inf I(\psi) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{sup/inf existerar} \\ \text{som reella tal}\end{array}\right)$$

där supremum och infimum tas över alla trappfunktioner så att $\phi(x) \leq f(x)$ och $\psi(x) \geq f(x)$

Bevis: Om $\sup I(\phi) < \inf I(\psi)$, säg att

$$\sup I(\phi) = \inf I(\psi) + \delta \quad \text{för något } \delta > 0.$$

Då gäller det att för alla trappfunktioner $\hat{\phi} \leq f \leq \hat{\psi}$ att

$$I(\hat{\psi}) - I(\hat{\phi}) \geq \inf I(\psi) - \sup I(\phi) = \delta.$$

Så om vi väljer $\varepsilon = \delta/2$ så finns det ~~ingen~~ inget par av trappfunktioner såsom i definitionen så att

$$\delta \leq I(\psi) - I(\phi) < \varepsilon = \delta/2.$$

Om $\sup I(\phi) = \inf I(\psi)$ så kan vi för varje $\varepsilon > 0$ hitta en trappfunktion ϕ_ε så att

$$I(\phi_\varepsilon) > \sup I(\phi) - \varepsilon/2$$

och en ψ_ε så att

$$I(\psi_\varepsilon) < \inf I(\psi) + \varepsilon/2.$$

Därför

$$I(\psi_\varepsilon) - I(\phi_\varepsilon) \leq \inf I(\psi) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\sup I(\phi) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Def: Om $f(x)$ är integrerbar på $[a,b]$ så skriver vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup I(\phi)$$

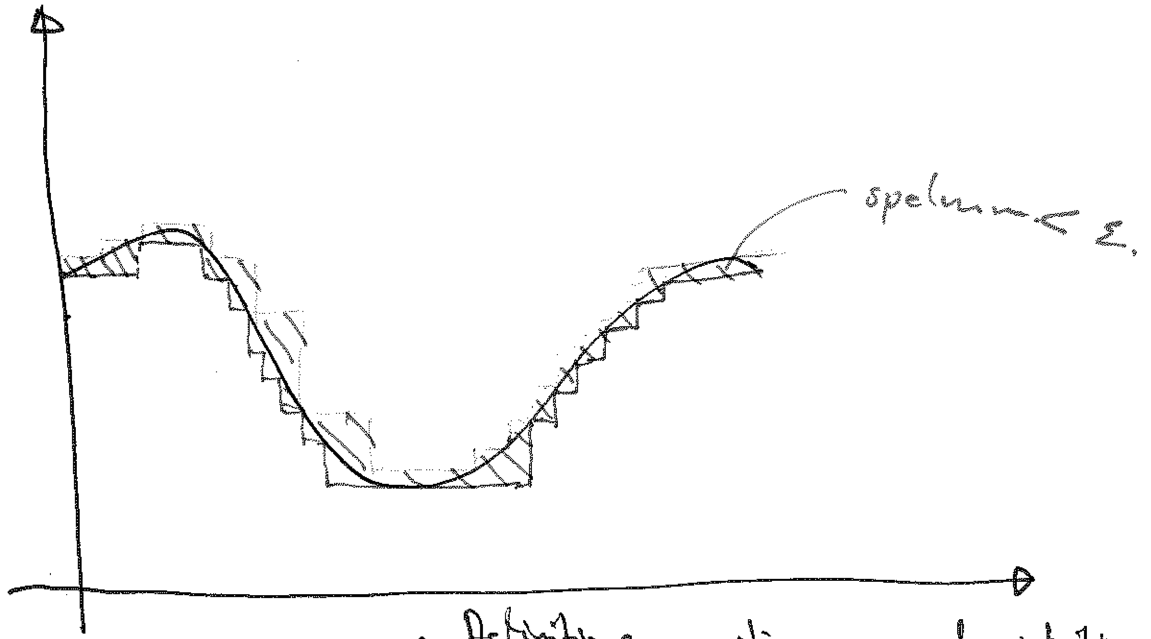
där sup tas över alla trappfunktioner $\phi(x) \leq f(x)$ på $[a,b]$.

Kommentarer:

1) Detta är en fantastisk definition - vi skapar ett uttryck för en väldigt generell area utifrån att bara använda rektanglar.

2) Men frågan kvarstår om vi kan använda definitionen för att göra beräkningar eller om ens ytan är väldefinierad.

Tanken

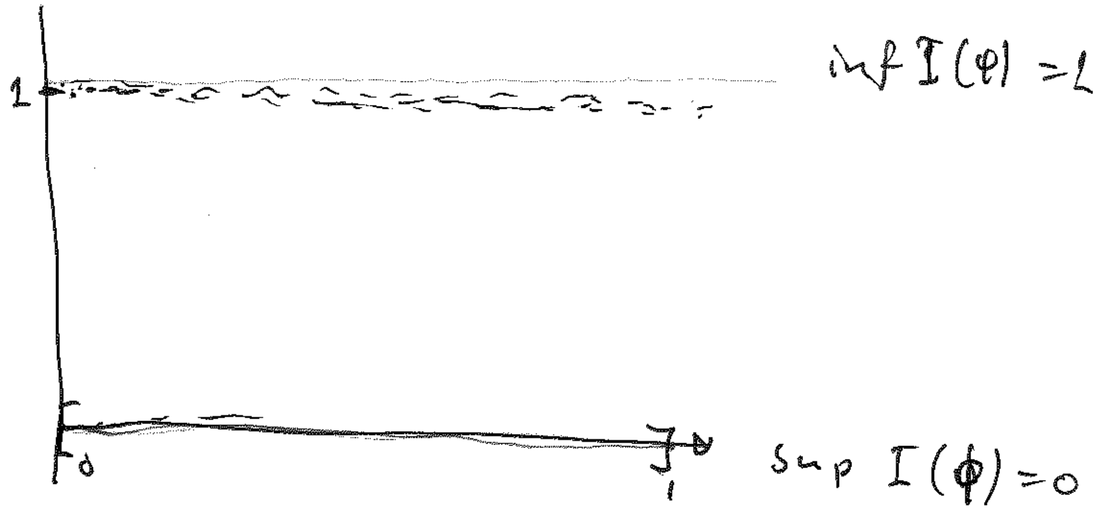


Ta 3 minuter.

- Definitionen stämmer med intuition
- vad definitionen säger
- vad behöver vi göra nu.

Fråga. Är alla funktioner integrerbara?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



så f är inte integrerbar.

Är några funktioner, annat än trappfunktioner, integrerbara?

~~Vad måste vi bevisa?~~

Kan vi hitta någon egenskap som garanterar att en funktion är integrerbar?

Sats: Låt $f(x)$ vara en funktion på $[a,b]$ som har egenskapen ? ? ? ? ? ______

Då är $f(x)$ integrerbar.

Vad måste vi bevisa?