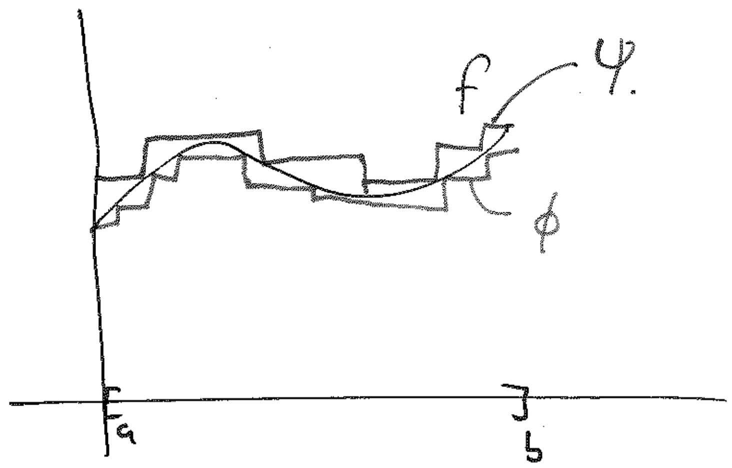
F18

Igår så definierade vi integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup I(\phi) = \inf I(\psi)$$

$\boxed{\text{Om detta gäller}}$

where the sup och inf ~~definiera~~ tas över alla trappfunktioner $\phi \leq f \leq \psi$.



Det är en definition är intuitiv.

Men kan vi räkna på den? Kan vi integrera några funktioner över huvud taget.

Exempel: Låt $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \setminus [0,1] \end{cases}$

är $\int_0^1 f(x)\,dx$ definierad.

Ta 3 minuter...

Så det finns funktioner som inte är Riemann-integrerbara. Kan vi hitta en klass av funktioner som är integrerbara?

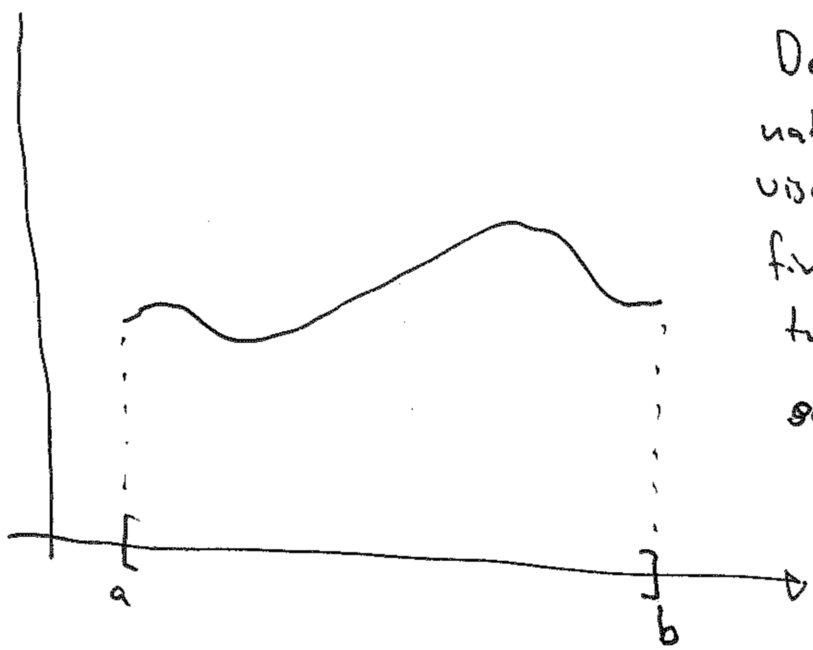
Om det inte finns en sådan klass ~~så är~~ som är tillräckligt vid (har tillräckligt många funktioner) så är definitionen värdelös.

Vad måste vi göra för att bevisa att en funktion $f(x)$ är integrerbar?

Def: $f(x)$ är integrerbar på $[a,b]$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns två trappfunktioner ϕ_ε och ψ_ε så att $\phi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x)$ och

$$I(\psi_\varepsilon) - I(\phi_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Så för att visa att $f(x)$ är integrerbar så måste vi för varje $\varepsilon > 0$ visa att ϕ_ε & ψ_ε exsisterar.



Det räcker naturligtvis att visa att det finns två trappfunktioner så att

$\phi_\varepsilon(x) = c_j$ för $x \in]a_{j-1}, a_j[$

$\psi_\varepsilon(x) = C_j$ för — " —

samma a_j för båda ϕ_ε och ψ_ε

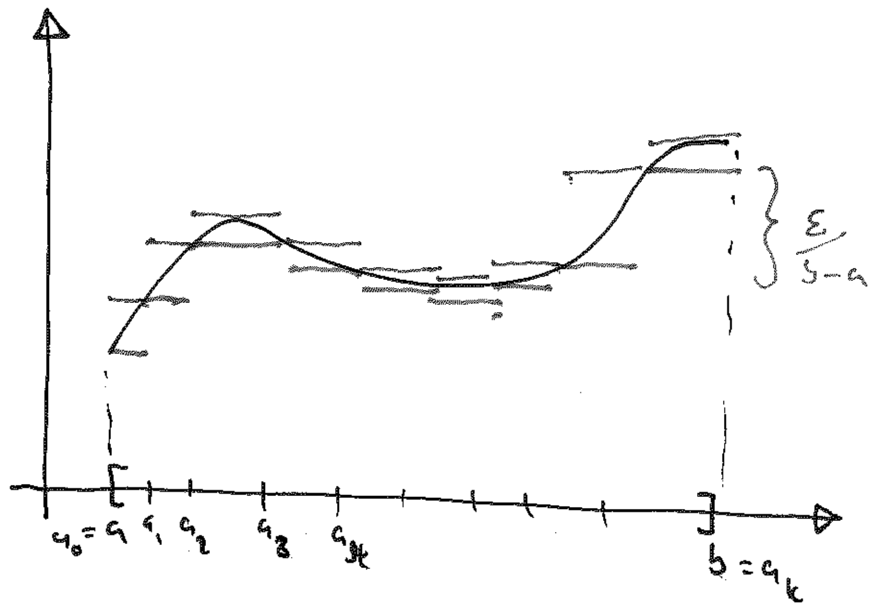
och $C_j - c_j < \frac{\varepsilon}{b-a}$ och $\phi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x)$.

För då

$$I(\psi_\varepsilon) - I(\phi_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k} C_j (a_j - a_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k} c_j (a_j - a_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \underbrace{(C_j - c_j)}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} (a_j - a_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k} a_j - a_{j-1} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \left(\cancel{a_1} - \underbrace{a_0}_{a} + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \dots + \underbrace{a_k}_{b} - \cancel{a_{k-1}} \right) = \frac{\varepsilon \cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}$$



Vi ska alltså välja en indelning

$a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ så att vi kan

välja C_j och c_j så att $c_j < f(x) \le C_j$ på $]a_{j-1}, a_j[$

och $C_j - c_j < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Om vi gör avståndet mindre och mindre mellan a_{j-1} och a_j så borde detta vara möjligt.

Specifikt så skulle vi vilja att om $|a_j - a_{j-1}| < \delta$

så är $\underbrace{f(a_{j-1}) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq f(x) \leq f(a_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ för alla $x \in [a_{j-1}, a_j]$

$$|f(x) - f(a_j)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{för alla } |x - a_{j-1}| < a_j$$

Nästan samma sak som kontinuitet.

Definition: Vi säger att $f(x)$ är likformigt kontinuerlig på $[a,b]$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{för alla } |x-y| < \delta_\varepsilon, \; x,y \in [a,b].$$

Sats: 1 Om $f(x)$ är likformigt kontinuerlig på $[a,b]$ så är $f(x)$ integrerbar på $[a,b]$

Hur många har repeterat appendix C?

Sats Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så är $f(x)$ integrerbar på $[a,b]$

Bevis av sats 1. Vi ska visa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns två trappfunktioner ϕ_ε och ψ_ε så att $\phi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x)$

och

$$I(\psi_\varepsilon) - I(\phi_\varepsilon) < \varepsilon .$$

Eftersom $f(x)$ är likformigt kontinuerlig på $[a,b]$ så finns det ett $\delta_{\frac{\varepsilon}{4(b-a)}}$ så att

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{för alla } |x-y| < \delta_{\varepsilon/4(b-a)} = \delta$$

Välj nu $a_0 = a$, $a_1 = a_0 + \frac{\delta}{2}$, $a_2 = a_0 + 2\frac{\delta}{2}$ + -- $a_j = a + j\frac{\delta}{2}$ -- $a_k = b$ för

~~k så~~ $k \geq \frac{2(b-a)}{\delta}$

Då kommer

$$(*) \quad \underbrace{f(a_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}}_{c_j} < f(x) < \underbrace{f(a_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}}_{C_j} \quad \text{för } |x - a_{j-1}| < \delta$$

$x \in [a_{j-1}, a_j]$

specifikt så kommer $c_j < f(x) < C_j$ för $a_{j-1} \le x \le a_{j-1} + \frac{\delta}{2} = a_j$

Låt nu $\phi_\varepsilon(x) = c_j$ för $x \in]a_{j-1}, a_j[$

$\psi_\varepsilon(x) = C_j$ — '' —

då $\phi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x)$ för $x \in [a,b]$

Desutom så kommer

$$I(\psi_\varepsilon) - I(\phi_\varepsilon) = \left\{\begin{matrix}\text{def}\\ \text{av } I\end{matrix}\right\} = \sum_{j=1}^{k} C_j (a_j - a_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k} c_j (a_j - a_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (\underbrace{(C_j - c_j)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \underbrace{(a_j - a_{j-1})}_{>0}) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (\cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} \dots + a_k)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

~~UPPGIFT~~

<u>Kommentarer:</u> Detta visar att vår definition är tillräkligt generell för att vi ska kunna integrera alla kontinuerliga funktioner vilket visar att vi är på rätt väg.

Uppgift.

Insättningsformeln. Om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$ så är

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

<u>Exempel</u> Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

<u>Svar</u>: $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ är kontinuerlig på $[-1,1]$

(faktum är att den är kont. för alla $x \neq \pm 2$)

så integralen är väldefinierad!

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{l|l} \text{standard subst} & x = 1 \Rightarrow \sin t = \tfrac{1}{2} \Rightarrow t = \pi/6 \\ 2\sin t = x & x = -1 \Rightarrow \qquad t = -\pi/6 \\ 2\cos t\,dt = dx & \\ \multicolumn{2}{l}{\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2(t)} = 2\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t,\ t \in [-\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{6}]} \end{array}\right.$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{8\sin^2 t\, \cancel{\cos t}}{\cancel{2\cos t}}\,dt = \left\{\begin{array}{l} \sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2} \\ \text{LÄR ER DETTA} \end{array}\right\} = 2\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \underbrace{1-\cos 2t}_{t\ -\frac{\sin 2t}{2}}\,dt$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{insättnings} \\ \text{formeln} \end{array}\right\} = 2\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{t=-\pi/6}^{\pi/6} = 2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

∎