Föreläsning 19

Förra gången så skrev vi ner följande sats.

Sats: Antag att $f(x)$ är $\overbrace{\text{kontinuerlig}}^{\text{likformigt}}$ på $[a,b]$. Då är $f(x)$ integrerbar på $[a,b]$.

Kom ihåg att likformigt kontinuerlig innebär att

Definition: Vi säger att $f(x)$ är likformigt kontinuerlig på $[a,b]$ om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$\underset{x,y\in[a,b]}{|x-y| < \delta_\varepsilon} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Kommentar, skillnaden mellan kontinuerlig och likformigt kontinuerlig är att Vi kan använda samma δ_ε för alla x. Vanlig kontinuitet kan δ_ε bero på x så man har inte "lika kontinuitet i alla punkter".

Bevis: 1) Vi ska bevisa att det för alla $\varepsilon > 0$ existerar $\phi_\varepsilon(x)$ och $\psi_\varepsilon(x)$ (trappfunktioner på $[a,b]$) så att

$$\phi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x) \quad \text{för alla } x \in [a,b]$$

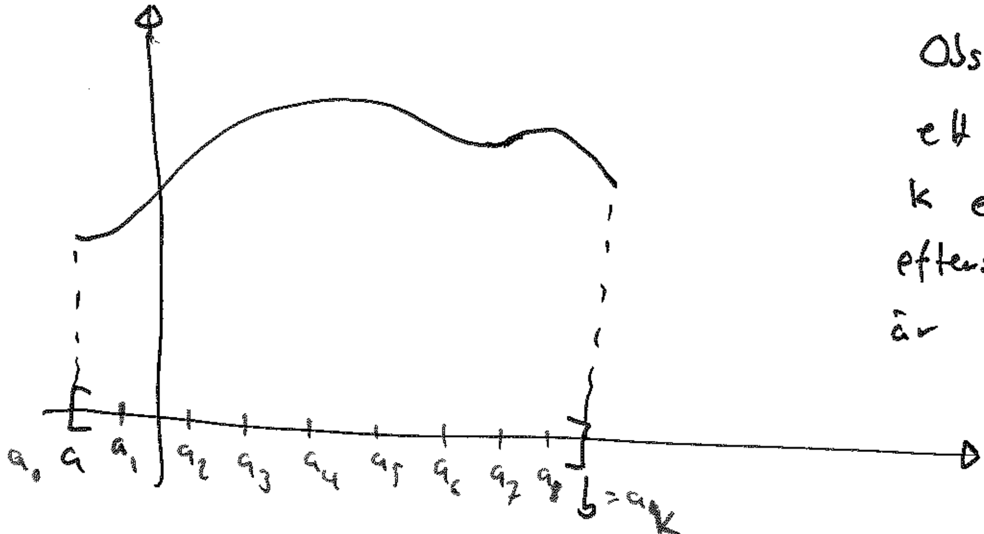
och $$I(\psi_\varepsilon(x)) - I(\phi_\varepsilon(x)) < \varepsilon.$$

2) Låt oss välja ett $\varepsilon > 0$. Då existerar det ett $\delta = \delta_{\varepsilon/4(b-a)} > 0$ så att

$$\left.\begin{array}{l} |x-y| < \delta \\ x,y \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad 1$$

eftersom f är likformigt kontinuerlig.

3) Definiera $a_0 = a$, $a_j = a + j\delta$ om $a + j\delta \le b$ och låt k vara det ~~först~~ minsta talet j så att $a_0 + k\delta \ge b$ (*) och sätt $a_k = b$.



Observera att ett sådant k existerar eftersom (*) är sann för alla $k \ge \frac{b-a}{\delta}$ så det måste finnas ett minsta k så att $a + k\delta \ge b$.

Observera att om $x \in]a_{j-1}, a_j[$ så

~~[illegible]~~ $|a_{j-1} - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a_{j-1})| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$$\Rightarrow c_j \equiv f(a_{j-1}) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f(a_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \equiv C_j \quad \text{då } x \in]a_{j-1}, a_j[\qquad (2)$$

4) Definiera

$$\Phi_\varepsilon(x) = c_j \qquad x \in]a_{j-1}, a_j[$$
$$\Psi_\varepsilon(x) = C_j \qquad x \in]a_{j-1}, a_j[.$$

(Och $\phi_\varepsilon(a_j) = \inf(f(x))$ för $j = 0, \dots, k$ (3)

$\psi(a_j) = \sup(f(x))$ för $j = 0, 1, \dots, k$ (4)

vi vet att $\inf f$ och $\sup f$ existerar eftersom f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$)

Då gäller $\Phi_\varepsilon(x) \le \left\{\begin{array}{l}\text{använd (2)} \\ \text{för } x \neq a_j \\ \text{(3) för} \\ x = a_j\end{array}\right\} \le f(x) \le \left\{\begin{array}{l}\text{använd} \\ \text{(2) och} \\ \text{(4)}\end{array}\right\} \le \Psi_\varepsilon(x).$

5) Satsen följer om vi kan bevisa att $I(\Psi_\varepsilon) - I(\Phi_\varepsilon) < \varepsilon$.
Enligt definitionen av integralen av en trappfunktion så

$$I(\Psi_\varepsilon) - I(\Phi_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k} C_j (a_j - a_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k} c_j (a_j - a_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \underbrace{(C_j - c_j)}_{< \frac{2\varepsilon}{4(b-a)}} \underbrace{(a_j - a_{j-1})}_{> 0} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{k} (a_j - a_{j-1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4(b-a)} (\cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + a_3 - \cancel{a_2} + \dots + a_k - a_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Trots att den här satsen är otroligt stark så är det en stor nackdel att vi antar likformig kontinuitet.

Låt oss se om det ~~?~~ hur en funktion som är kontinuerlig på ett intervall men inte likformigt kontinuerlig skulle se ut.

Om f är likformigt kontinuerlig så existerar det för varje $\varepsilon > 0$ ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$\begin{array}{l} |x-y| < \delta_\varepsilon \\ x, y \in D_f \end{array} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Så om f inte är likformigt kontinuerlig, men kontinuerlig, så ~~st~~ måste det existera ett $\varepsilon > 0$ så att det inte finns något δ_ε så att $(*)$ gäller. Specifikt så är $\frac{1}{j}$ inte ett sådant δ_ε för $j = 1, 2, \ldots$. Så det måste finnas $x_j, y_j \in D_f$ så att

$$|x_j - y_j| < \frac{1}{j} \quad \text{men} \quad |f(x_j) - f(y_j)| \geq \varepsilon \qquad (**).$$

Ta 3 minuter, försök hitta på en idee hur ni vill fortsätta

Om D_f är ett slutet och begränsat intervall

så vet vi, Bolzano-Weierstrass Sats, att

det existerar en delsekvens $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots x_{k_j}$

så att x_{k_j} är konvergent, $\lim_{j \to \infty} x_{k_j} = x_0 \in D_f$.

och

$$|y_{k_j} - x_0| = |y_{k_j} - x_{k_j} + x_{k_j} - x_0| \leq \left\{\begin{matrix}\text{triangel} \\ \text{olikheten}\end{matrix}\right\} \leq$$

$$\leq \underbrace{|y_{k_j} - x_{k_j}|}_{\leq \frac{1}{k_j} \to 0} + \underbrace{|x_{k_j} - x_0|}_{\to 0} \to 0 \quad \text{enligt summa regeln.}$$

så $|y_{k_j} - x_0| \to 0$.

Nu eftersom $f(x)$ är kontinuerlig, och ekvation (**), så

$$\varepsilon \leq |f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \underset{\substack{\text{olikhet} \\ \text{i gränsvärde}}}{\Longrightarrow} \varepsilon \leq \lim_{j \to \infty} |f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})|$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{kontinuitet} \\ \text{av } f \\ \text{och } x_{k_j} \to x_0 \\ y_{k_j} \to x_0\end{matrix}\right\} = |f(x_0) - f(x_0)| = 0. \quad \text{Så } 0 < \varepsilon \leq 0.$$

Motsägelse!

Vad har vi gjort? Vi antog att

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(x) \text{ är kontinuerlig på } D_f \\ 2)\ D_f \text{ är ett slutet begränsat intervall} \\ 3)\ f(x) \text{ är inte likformigt kontinuerlig} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Motsägelse!}$$

<u>Sats</u> Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall så är $f(x)$ inte likformigt kontinuerlig.

Kom ihåg att

Sats: Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ då är, om vi definierar $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$,

$$S'(x) = f(x)$$

för alla $x \in [a,b]$.

Sats: [Insättningsformeln] Antag att $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$, på $[a,b]$ ~~...~~

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bevis. Låt $S(x)$ vara som i analysens huvudsats. Då gäller, eftersom F är en primitiv till $f(x)$ att

$$S'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

så

$$F(x) = S(x) + \text{konstant} = \int_a^x f(t)\,dt + C. \quad (1)$$

Sätt in $x = a$ och härled

$$F(a) = 0 + C \implies C = F(a).$$

Här använder vi

$f'(x) = 0$

$\implies f(x) = \text{konstant}$

Så (1) implicerar att

$$F(x) - C = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\implies \left\{\begin{matrix}\text{sätt} \\ x = b\end{matrix}\right\} \implies F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\square$

<u>Exempel</u>: Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx$.

<u>Svar</u> (<u>Varning</u>, jag kommer att räkna fel!)

Vi ser direkt att $-\dfrac{1}{(2x+1)}$ är en primitiv till $\dfrac{2}{(2x+1)^2}$ eftersom $\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{2x+1}\right) =$

$$= -\frac{-1}{(2x+1)} \cdot \frac{d(2x+1)}{dx} =$$

$$= \frac{2}{(2x+1)^2}.$$

Så enligt insättningsformeln så

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx = \underbrace{\cancel{-\frac{1}{(2\cdot 1+1)}}}_{-\frac{1}{3}} + \underbrace{\left(+\frac{1}{(-2+1)}\right)}_{=-1} = -\frac{4}{3}.$$

Är svaret rimligt? Vad har gått fel?

Ta 3 minuter.

Alltid, Alltid, Alltid när man använder en sats så ska man verifiera att antagandena är uppfyllda.

Här så är inte $-\frac{1}{2x+1}$ en primitiv till $\frac{2}{(2x+1)^2}$ i punkten $x = -\frac{1}{2}$!

$\boxed{\text{Så rätt svar är: } \int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx \text{ är } \underline{\underline{\text{inte}}} \text{ integrerbar.}}$

Det intressanta är att vissa ~~integraler~~ funktioner som ~~...~~ inte är begränsade går fortfarande att definiera

<u>Definition</u>: Antag att $f(x)$ är definierad på $[a,b[$ och att $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ är definierad för

Men

alla $\varepsilon > 0$. Då säger vi att den generaliserade integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ existerar och antar värdet A. Om

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = A.$$

(På ~~samma~~ sätt f definierad på $]a,b]$ och $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ existerar.)

Exempel. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ existerar som en generaliserad integral för $\alpha < 1$.

Och $$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Lösning: Om $\alpha \neq 1$
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_{x=\varepsilon}^{1} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Där vi har använt insättningsformeln och att $\frac{1}{x^\alpha}$ är kontinuerlig och därför integrerbar, på $[\varepsilon, 1]$.

Standardgränsvärdet $\varepsilon^{1-\alpha} \to 0$ då $\varepsilon \to 0^+$ för $1-\alpha > 0$ ger att
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Om $\alpha > 1$ så $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-\alpha} = \infty$ så den generaliserade integralen existerar inte.

Om $\alpha = 1$ så är
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{1}{\varepsilon} \to \infty \text{ då } \varepsilon \to 0$$
enligt ~~[illegible]~~ standardgränsvärde.